# Svar på opgave 2008-81
# Januar 2008

## *Opgaven:*

Symbolet ! (udråbstegn) bruges sådan:

$$2! = 1\cdot 2 \quad , \quad 3! = 1\cdot 2\cdot 3 \quad , \quad 4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 \quad , \quad . \; . \; . \; .$$

Altså er *n*! produktet af alle naturlige tal på *n* og derunder.

Vis nu, at tallet $2007!\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2007}\right)$ er deleligt med 2008.

## *Løsning:*

Vi bemærker først, at tallet *z* er et naturligt tal, fordi man ved at gange parentesen ud led for led får lutter hele tal. Hvert led er nemlig produkt af samtlige hele tal mellem 1 og 2007 med undtagelse af en enkelt faktor.

Vi udregner parentesen ved at gruppere brøkerne i par:

$$z = 2007!\cdot\left(\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2007}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2006}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2005}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{1003}+\frac{1}{1005}\right)+\frac{1}{1004}\right) .$$

$$= 2007!\cdot\left(\frac{2007+1}{1\cdot 2007}+\frac{2006+2}{2\cdot 2006}+\frac{2005+3}{3\cdot 2005}+\cdots+\frac{1005+1003}{1003\cdot 1005}+\frac{1}{1004}\right)$$

$$= 2007!\cdot 2008\cdot\left(\frac{1}{1\cdot 2007}+\frac{1}{2\cdot 2006}+\frac{1}{3\cdot 2005}+\cdots+\frac{1}{1003\cdot 1005}+\frac{1}{1004\cdot 2008}\right)$$

$$= 2008\cdot 2007!\cdot\left(\frac{1}{1\cdot 2007}+\frac{1}{2\cdot 2006}+\frac{1}{3\cdot 2005}+\cdots+\frac{1}{1003\cdot 1005}+\frac{1}{1004\cdot 2008}\right) = 2008\cdot k \; .$$

Her betegner *k* tallet efter gangetegnet efter 2008. Hvis parentesen ganges ud ved at 2007! ganges med hver af brøkerne, er alle led hele tal, fordi de to faktorer i nævneren kan for- kortes ud mod to af faktorerne i tælleren. Den sidste brøk giver ved denne multiplikation:

$$\frac{2007!}{1004\cdot 2008} = \frac{2007!}{1004\cdot 2^3\cdot 251}$$

Tallene i nævneren kan forkortes ud mod tal i tælleren, så også dette resultat er et helt tal. Dermed er *k* et helt tal, og da *z* = 2008*k*, er *z* delelig med 2008.