Svar på opgave 2008-82
Februar 2008

Opgaven:

Løs ligningssystemet

$$(x+y)(x^2-y^2)=675$$
$$(x-y)(x^2+y^2)=351$$

dvs. bestem samtlige talpar (x,y), der opfylder ligningerne.

Løsning:

1. metode.
Vi skriver ligningerne sådan:

$$675=(x+y)(x^2-y^2)$$
$$(x-y)(x^2+y^2)=351\ ,$$

og ved multiplikation af ligningerne fås

$$675\cdot(x-y)(x^2+y^2)=351\cdot(x+y)(x^2-y^2)\ .$$

Nu er $675=25\cdot 27$ og $351=13\cdot 27$ og desuden er $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$. Derfor er den sidste ligning ensbetydende med

$$25\cdot 27\cdot(x-y)(x^2+y^2)=13\cdot 27\cdot(x+y)(x+y)(x-y)\ \Leftrightarrow\ 25(x^2+y^2)=13(x+y)^2$$
$$\Leftrightarrow\ 25x^2+25y^2=13x^2+13y^2+26xy\ \Leftrightarrow\ 12x^2-26xy+12y^2=0$$
$$\Leftrightarrow\ 6x^2-13xy+6y^2=0\ .$$

Vi opfatter dette som en andengradsligning i x. Diskriminanten er

$$(-13y)^2-4\cdot 6\cdot 6y^2=169y^2-144y^2=25y^2\ .$$

Derfor er eventuelle løsninger

$$x=\frac{13y\pm\sqrt{25y^2}}{12}=\frac{13y\pm 5y}{12}=\begin{cases}\frac{3}{2}y\\ \frac{2}{3}y\end{cases}\ .$$

I. Hvis $x=\frac{3}{2}y$ får vi, at

$$x - y = \tfrac{3}{2}y - y = \tfrac{1}{2}y \quad \text{og} \quad x^2 + y^2 = \tfrac{9}{4}y^2 + y^2 = \tfrac{13}{4}y^2 \ ,$$

så den sidste af de givne ligninger giver:

$$\tfrac{1}{2}y \cdot \tfrac{13}{4}y^2 = 351 \iff \tfrac{13}{8}y^3 = 351 \iff y^3 = \frac{351 \cdot 8}{13} = 216 \iff y = 6 \ .$$

Derefter er $x = \tfrac{3}{2}y = \tfrac{3}{2} \cdot 6 = 9$, så vi har fundet en mulig løsning til $(x,y) = (9,6)$. Ved at indsætte i de to oprindelige ligninger ser vi, at dette er en løsning.

II. Hvis $x = \tfrac{2}{3}y$ får vi på samme måde

$$x - y = \tfrac{2}{3}y - y = -\tfrac{1}{3}y \quad \text{og} \quad x^2 + y^2 = \tfrac{4}{9}y^2 + y^2 = \tfrac{13}{9}y^2 \ ,$$

så vi af den sidste ligning får

$$-\tfrac{1}{3}y \cdot \tfrac{13}{9}y^2 = 351 \iff -\tfrac{13}{27}y^3 = 351 \iff y^3 = -\frac{351 \cdot 27}{13} = -729 \iff y = -9 \ .$$

Derefter er $x = \tfrac{2}{3}y = \tfrac{2}{3} \cdot (-9) = -6$, så vi har fundet en mulig løsning til $(x,y) = (-6,-9)$.
Ved at indsætte i de to oprindelige ligninger ser vi, at dette er en løsning. Ialt har ligningssystemet altså de to løsninger

$$(x,y) = (9,6) \quad \text{og} \quad (x,y) = (-6,-9) \ .$$

2. metode.
Vi udregner venstre side i begge ligninger:

$$x^3 - xy^2 + x^2y - y^3 = 675$$
$$x^3 + xy^2 - x^2y - y^3 = 351 \ .$$

Vi lægger ligningerne sammen og får

$$2x^3 - 2y^3 = 1026 \iff x^3 - y^3 = 513 \ . \qquad (1)$$

Derefter trækker vi den nederste ligning fra den øverste og får

$$-2xy^2 + 2x^2y = 324 \iff x^2y - xy^2 = 162 \iff xy(x - y) = 162 \ . \qquad (2)$$

I ligningen (1) kan vi opløse venstre side i faktorer:

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2) = 513 \ , \qquad (3)$$

og ved division af (3) med (2) får vi

$$\frac{x^2 + xy + y^2}{xy} = \frac{513}{162} \iff \frac{x}{y} + 1 + \frac{y}{x} = \frac{19}{6} \ . \qquad (4)$$

For nemheds skyld kan vi sætte $k = \frac{x}{y}$, så ligningen (4) bliver

$$k + 1 + \frac{1}{k} = \frac{19}{6} \iff k^2 + k + 1 = \frac{19}{6}k \iff 6k^2 + 6k + 6 = 19k$$

$$\Leftrightarrow \;\; 6k^2 - 13k + 6 = 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; k = \frac{13 \pm \sqrt{169-144}}{12} = \frac{13 \pm 5}{12} = \begin{cases} \frac{3}{2} \\ \frac{2}{3} \end{cases} .$$

Altså er $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$ så $x = \frac{3}{2}y$ eller $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$ så $x = \frac{2}{3}y$. Herefter forløber resten af regningerne som under metode 1.

3. metode.

Vi sætter

$$u = \frac{x+y}{2} \quad , \quad v = \frac{x-y}{2} \; .$$

Så er $x + y = 2u$ og $x - y = 2v$ og desuden

$$u + v = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} = x \qquad \text{og} \qquad u - v = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} = y$$

hvoraf

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) = 2u \cdot 2v = 4uv$$
$$x^2 + y^2 = (u+v)^2 + (u-v)^2 = 2u^2 + 2v^2 \; .$$

Ligningssystemet ser nu sådan ud:

$$\begin{array}{lcl} 2u \cdot 4uv = 675 & \text{eller} & 8u^2v = 675 \\ 2v \cdot (2u^2 + 2v^2) = 351 & & 4u^2v + 4v^3 = 351 \; . \end{array}$$

Af den sidste ligning fås

$$4u^2v = 351 - 4v^3 \;\; \Leftrightarrow \;\; 8u^2v = 702 - 8v^3 \; ,$$

og dette indsættes i den første ligning:

$$702 - 8v^3 = 675 \;\; \Leftrightarrow \;\; 8v^3 = 27 \;\; \Leftrightarrow \;\; v^3 = \frac{27}{8} \;\; \Leftrightarrow \;\; v = \frac{3}{2} \; .$$

Dette indsættes:

$$8u^2v = 675 \;\; \Leftrightarrow \;\; 8u^2 \cdot \frac{3}{2} = 675 \;\; \Leftrightarrow \;\; u^2 = \frac{675}{12} = \frac{225}{4} \;\; \Leftrightarrow \;\; u = \pm\frac{15}{2} \; .$$

I. Hvis $u = \frac{15}{2}$, $v = \frac{3}{2}$ er

$$x = u + v = 9 \;\; , \;\; y = u - v = 6 \;\; ,$$

så en mulig løsning er $(x,y) = (9,6)$. Ved indsættrelse i det oprindelige ligningssystem ses den at passe.

II. Hvis $u = -\frac{15}{2}$, $v = \frac{3}{2}$ er

$$x = u + v = -6 \;\; , \;\; y = u - v = -9 \;\; ,$$

så en mulig løsning er $(x,y) = (-6,-9)$, som også ses at passe.