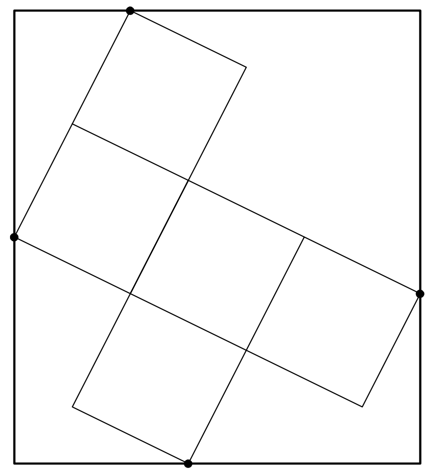
Svar på opgave 2008-83
Marts 2008

Opgaven:

I et rektangel med siderne 7 og 8 ligger fem ens kvadrater som vist.

Bestem kvadraternes fælles sidelængde.



Løsning:

1. metode

Vi betegner længderne af projektionerne af kvadraternes sider på rektanglets sider med x og y som vist på figuren. Så får vi ligningssystemet

$$3x + y = 7$$

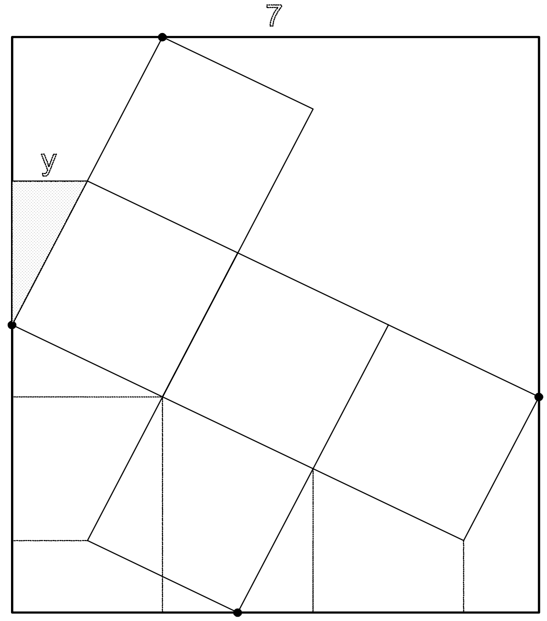
$$3x + 2y = 8 \ .$$

Subtraktion giver

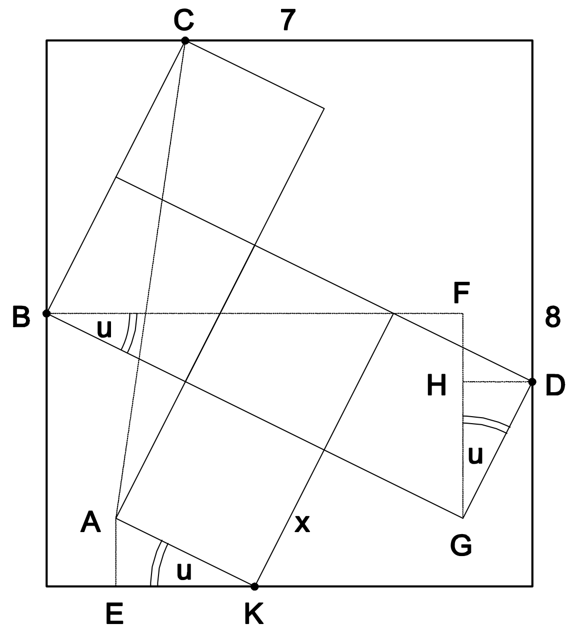
$$(3x + 2y) - (3x + y) = 8 - 7$$

$$\text{eller} \quad y = 1 \ .$$

Vi indsætter $y = 1$ i en af ligningerne og får $x = 2$. I den gråtonede trekant får vi kvadratets sidelængde til $\sqrt{5}$.



2. metode



Med u betegner vi $\angle AKE$. Da projektionen af BD på rektanglets korte side har længden 7, har også AC's projektion på den lange side længden 7. Dermed er AE = 8 - 7 = 1. Med x betegner vi sidelængden i kvadraterne.
I ΔAEK får vi, at

$$\sin u = \frac{1}{x} \iff x = \frac{1}{\sin u}$$

Nu er ΔAEK og ΔDHG kongruente, så $HD = AE = 1$. Dette medfører, at
$BF = 7 - 1 = 6$.
Derfor får vi i ΔBFG, at

$$\cos u = \frac{6}{3x} \iff x = \frac{2}{\cos u}$$

Men så er

$$\frac{1}{\sin u} = \frac{2}{\cos u} \iff \frac{\sin u}{\cos u} = \frac{1}{2} \iff \tan u = \frac{1}{2}$$

I ΔAEK får vi

$$\frac{1}{2} = \tan u = \frac{AE}{EK} = \frac{1}{EK} \quad \text{så} \quad EK = 2 \ .$$

Pythagoras sætning giver så i ΔAEK, at

$$AK^2 = AE^2 + EK^2 = 1 + 4 = 5 \ ,$$

og derfor er kvadraternes sidelængde $\sqrt{5}$.