Svar på opgave 2008-84
April 2008

Opgaven:

Reducér følgende udtryk, når a, b og c er forskellige tal:

$$\frac{bc(c^2-b^2)+ca(a^2-c^2)+ab(b^2-a^2)}{b^2c^2(c-b)+c^2a^2(a-c)+a^2b^2(b-a)}\ .$$

Samtlige mellemregninger skal angives.

Løsning:

1. metode.

I den første parentes i tælleren og i nævneren 'indskyder' vi henholdsvis a^2 og a:

$$k=\frac{bc(c^2-a^2+a^2-b^2)+ca(a^2-c^2)+ab(b^2-a^2)}{b^2c^2(c-a+a-b)+c^2a^2(a-c)+a^2b^2(b-a)}\ .$$

Vi ganger første parentes i tæller og nævner ud:

$$k=\frac{bc(c^2-a^2)+bc(a^2-b^2)+ca(a^2-c^2)+ab(b^2-a^2)}{b^2c^2(c-a)+b^2c^2(a-b)+c^2a^2(a-c)+a^2b^2(b-a)}\ .$$

I tælleren kan vi i 1. og 3. led sætte faktoren $a^2 - c^2$ uden for parentes og i 2. og 4. led sættes faktoren $b^2 - a^2$ uden for parentes. På samme måde sætter vi i nævneren i 1. og 3. led fakto- ren $a - c$ udenfor parentes og i 2. og 4. led sætter vi $b - a$ uden for perentes:

$$k=\frac{(a^2-c^2)(ac-bc)+(b^2-a^2)(ab-bc)}{(a-c)(a^2c^2-b^2c^2)+(b-a)(a^2b^2-b^2c^2)}\ .$$

Vi sætter fælles faktorer uden for parentes i tæller og nævner:

$$k=\frac{(a^2-c^2)c(a-b)+(b^2-a^2)b(a-c)}{(a-c)c^2(a^2-b^2)+(b-a)b^2(a^2-c^2)}\ .$$

Parenteserne med andengradsled opløses i faktorer efter formlen $p^2 - q^2 = (p - q)(p + q)$:

$$k = \frac{(a-c)(a+c)c(a-b)+(b-a)(b+a)b(a-c)}{(a-c)c^2(a-b)(a+b)+(b-a)b^2(a-c)(a+c)} \ .$$

I tæller og nævner sættes a - c og a - b uden for parentes:

$$k = \frac{(a-c)(a-b)[c(a+c)-b(b+a)]}{(a-c)(a-b)[c^2(a+b)-b^2(a+c)]} \ .$$

Brøken forkortes og parenteserne i tæller og nævner ganges ud:

$$k = \frac{ac+c^2-b^2-ab}{c^2a+c^2b-b^2a-b^2c} \ .$$

I tælleren tages 1. og 4. led sammen, i nævneren 1. og 3. samt 2. og 4. led:

$$k = \frac{a(c-b)+c^2-b^2}{bc(c-b)+a(c^2-b^2)} \ .$$

I tæller og nævner opløses c^2 - b^2 i faktorer:

$$k = \frac{a(c-b)+(c-b)(c+b)}{bc(c-b)+a(c-b)(c+b)} \ .$$

Forkort brøken med c - b:

$$k = \frac{a+b+c}{ac+bc+ca} \ ,$$

og dette udtryk kan ikke reduceres yderligere.

2. metode.

Ved brug af en symbolregner får vi, at den oprindelige brøk kan reducers til den sidste.
Vi skal altså med håndkraft vise, at

$$\frac{bc(c^2-b^2)+ca(a^2-c^2)+ab(b^2-a^2)}{b^2c^2(c-b)+c^2a^2(a-c)+a^2b^2(b-a)} = \frac{a+b+c}{ac+bc+ca} \ .$$

Dette gøres lettest ved at gange tæller og nævner ud på venstre side og derefter gange over kors. Der vil da optræde præcis de samme led på højre og venstre side af lighedstegnet. Dermed er de to brøker vist at være lige store.