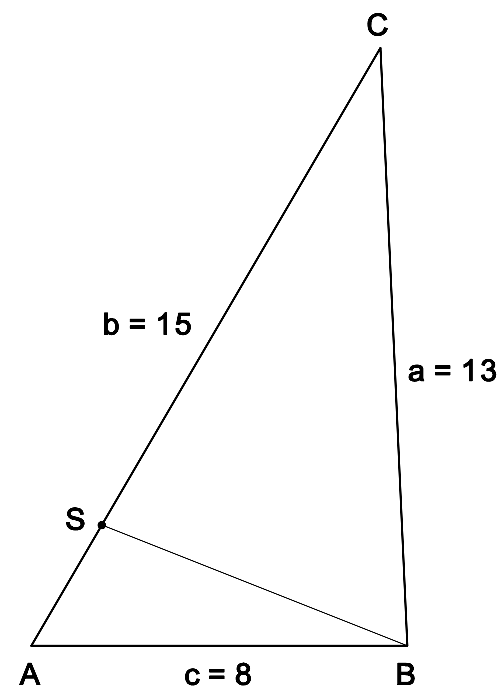
Svar på opgave 2008-85
Maj 2008

Opgaven:

I ΔABC er $AB = 8$, $BC = 13$ og $AC = 15$.

Vis, at der findes (mindst) et punkt S på AC, så længderne af AS og BS også er hele tal.



Løsning:

(se næste side)

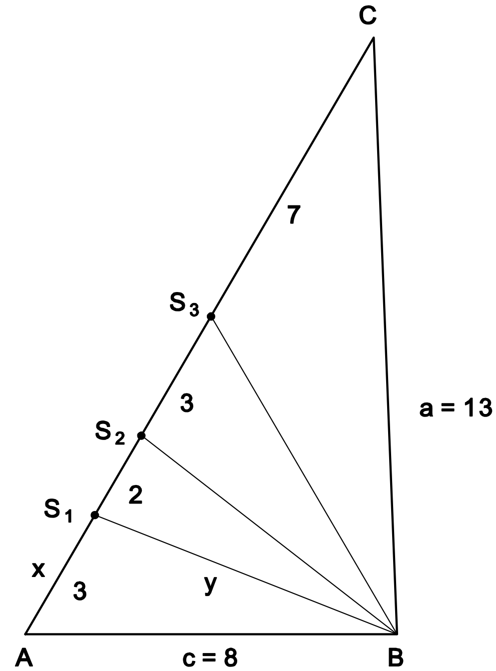
I ΔABC med siderne $AB = 8$, $BC = 13$ og $AC = 15$. Vi skal vise, at der findes mindst et punkt S på siden AC, så både AS og SB er hele tal.

Cosinusrelationen i ΔABC giver

$$\cos A = \frac{15^2 + 8^2 - 13^2}{2 \cdot 8 \cdot 15} = \frac{1}{2}\ .$$

For nemheds skyld sætter vi $x = AS$ og $y = SB$. Cosinusrelationen i ΔASB giver

$$y^2 = x^2 + 8^2 - 2 \cdot x \cdot 8 \cdot \cos A \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = x^2 + 64 - 16x \cdot \tfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = x^2 - 8x + 64\ .$$



Vi kan opstille en tabel over sammenhørende værdier af x og y^2 for $x = 1, 2, \ldots, 14$:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
y^2	57	52	49	48	49	52	57	64	73	84	97	112	129	148

Heraf ser vi, at hvis y skal være et helt tal, kan vi bruge $x = 3$, 5 eller 8. Værdierne for y er da 7, 7 eller 8.

Bemærkning. Da $\cos A = \frac{1}{2}$, er $A = 60°$. Vi kan derfor afsætte et punkt på AC, som er 8 enheder oppe ad AC regnet fra A - på figuren er dette punkt benævnt S_3. Så er $\Delta\, ABS_3$ ligesidet og dermed $BS_3 = 8$, altså et helt tal som ønsket.