Svar på opgave 2008-86
Juni 2008

Opgaven:

Vi ser på udtrykket

$$k = (n^2 + n - 7)(n^2 + n - 3) + 4$$

hvor n er et helt, positivt tal.

Ved at indsætte de første værdier af n fås tabellen:

n	1	2	3	4	5
k	9	1	49	225	625

Det ser ud til at k altid er et kvadrattal:

$$9 = 3^2 \quad , \quad 1 = 1^2 \quad , \quad 49 = 7^2 \quad , \quad 225 = 15^2 \quad , \quad 625 = 25^2 \quad .$$

Vis, at dette altid er tilfældet.

Løsning:

1. metode.

Vi betegner den første af de to parenteser med m:

$$m = n^2 + n - 7$$

og derfor er

$$n^2 + n - 3 = n^2 + n - 7 + 4 = m + 4$$

Så er

$$k = m(m + 4) + 4 = m^2 + 4m + 4 = (m + 2)^2$$

og heri indsættes udtrykket for m:

$$k = (m + 2)^2 = (n^2 + n - 7 + 2)^2 = (n^2 + n - 5)^2$$

Altså er k et kvadrattal for alle hele tal n og ikke blot for positive hele tal.

2. metode.
Vi kan gange parenteserne ud i tallet k og får

$$k = n^4 + 2n^3 - 9n^2 - 10n + 25$$

Hvis dette skal være et kvadrattal, kunne vi gætte på, at k må have udseendet

$$(n^2 + a \cdot n + 5)^2 \quad \text{eller} \quad (n^2 + a \cdot n - 5)^2$$

hvor a er et endnu ukendt tal.

Når vi udregner parentesernes andenpotens, vil første led nemlig blive n^4 og sidste led 25.
Vi prøver hvert tilfælde for sig.

I. Ved udregning får vi, at

$$(n^2 + a \cdot n + 5)^2 = n^4 + 2an^3 + (a^2 + 10)n^2 + 10an + 25 \,.$$

Hvis dette skal skal stemme overens med k, gælder

$$n^4 + 2n^3 - 9n^2 - 10n + 25 = n^4 + 2an^3 + (a^2 + 10)n^2 + 10an + 25$$

og derfor må der ved sammenligning af koefficienterne til leddene af 3., 2. og 1. grad gælde, at

$$2a = 2 \;\;,\;\; a^2 + 10 = -9 \;\;,\;\; 10a = -10$$

Der findes ingen tal a, der opfylder disse ligninger.

II. Så prøver vi at udregne

$$(n^2 + a \cdot n - 5)^2 = n^4 + 2an^3 + (a^2 - 10)n^2 - 10an + 25$$

Hvis dette skal stemme overens med k, har vi

$$n^4 + 2n^3 - 9n^2 - 10n + 25 = n^4 + 2an^3 + (a^2 - 10)n^2 - 10an + 25$$

og sammenligning af koefficienter giver

$$2a = 2 \;\;,\;\; a^2 - 10 = -9 \;\;,\;\; -10a = -10$$

Her passer $a = 1$. Dermed har vi fundet, at

$$k = (n^2 + a \cdot n - 5)^2 = (n^2 + n - 5)^2$$