

Svar på opgave 2008-87

September 2008

Opgaven:

En række hele tal kaldes *konsekutive*, hvis de følger lige efter hinanden i talrækken. Vi lægger konsekutive tal sammen, fx

$$17 + 18 + 19 + 20 + 21 = 95$$

$$32 + 33 + 34 = 49 + 50 = 99$$

$$48 + 49 + 50 + 51 = 198$$

Tallet 95 er sum af 5 konsekutive tal, 99 er sum af 3 eller 2 konsekutive tal og 198 kan skrives som sum af 4 konsekutive tal.

Find samtlige måder at skrive 2008 som sum af konsekutive positive tal.

Løsning:

Det første tal i talrækken betegner vi med n og det sidste med $n + k$. Derfor kan vi skrive sådan:

$$n + (n + 1) + (n + 2) + \cdots + (n + k - 2) + (n + k - 1) + (n + k) = 2008 .$$

Der er her ialt $k + 1$ led, fordi

$$\begin{array}{ll} n \text{ er led nr. } 1 & n + 3 \text{ er led nr. } 4 \\ n + 1 \text{ er led nr. } 2 & \dots \\ n + 2 \text{ er led nr. } 3 & n + k \text{ er led nr. } k + 1 . \end{array}$$

Vi skriver summen i omvendt orden:

$$(n + k) + (n + k - 1) + (n + k - 2) + \cdots + (n + 2) + (n + 1) + n = 2008 .$$

Nu lægger vi de to ligninger sammen, led for led:

$$\begin{aligned} & (n + n + k) + (n + 1 + n + k - 1) + (n + 2 + n + k - 2) + \cdots \\ & + (n + k - 2 + n + 2) + (n + k - 1 + n + 1) + (n + k + n) = 4016 . \end{aligned}$$

Hver af parenteserne er $2n + k$ og da der er $k + 1$ parenteser, får vi

$$(k + 1)(2n + k) = 4016 .$$

Nu er $4016 = 2^4 \cdot 251$, så

$$(k + 1)(2n + k) = 2^4 \cdot 251 .$$

Da $2n > 1$ er $2n + k > k + 1$, så vi har følgende sammenhørende muligheder for de to fakto- rer (parenteser):

$$\begin{aligned} k + 1 &: 2, 2^2, 2^3, 2^4 \\ 2n + k &: 2^3 \cdot 251, 2^2 \cdot 251, 2 \cdot 251, 251 . \end{aligned}$$

De tre føste muligheder kan ikke bruges. For hvis $k + 1$ er lige, er k ulige og dermed er $2n + k$ ulige, fordi $2n$ er lige. Den sidste mulighed er

$$k + 1 = 16, 2n + k = 251 .$$

Vi får heraf $k = 15$ og $n = 118$. Altså er den eneste mulige fremstilling af 2008 som sum af konsekutive naturlige tal denne:

$$118 + 119 + 120 + \dots + 131 + 132 + 133 = 2008 .$$

Bemærkning. Nogle indsendere har benyttet regneark til at gennemregne samtlige mulig- heder. Dette er tilladt, men ved brug af hjælpemidler som regneark og/eller andre program- mer kræver vi en dokumentation af de kommandoer (program), der er benyttet.