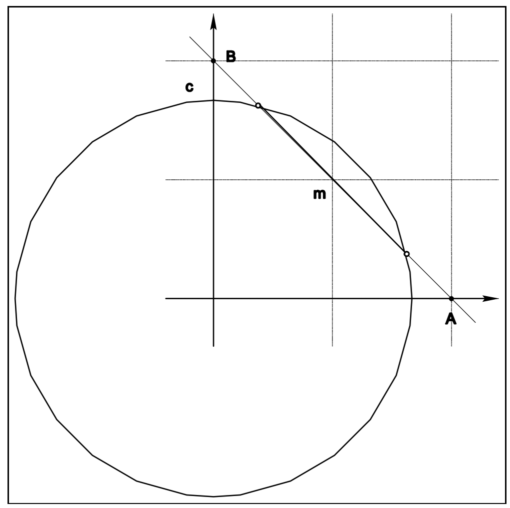
Svar på opgave 2008-88
Oktober 2008

Opgaven:

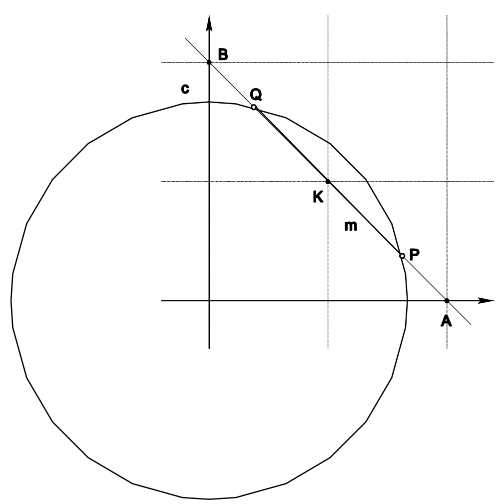
Linjen *m* går gennem punkterne *A* (2,0) og *B* (0,2) i koordinatsystemet.
Cirklen *c* har centrum i (0,0) og radius $\frac{5}{3}$.

Hvor stor en brøkdel af linjestykket *AB* ligger inden for cirklen?



Løsning:

Vi betegner skæringspunkterne mellem cirklen og linjen med *P* og *Q* som vist. Vi betegner desuden midtpunktet af *AB* (eller af *PQ*) med *K*, så *K* har koordinaterne (1,1). Vi vil finde afstanden *PK*.



Cirklens ligning er

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9} \ ,$$

og linjens ligning er

$$y = 2 - x \ .$$

Koordinaterne til skæringspunkterne fås ved at løse ligningssystemet bestående af disse to ligninger.
Vi indsætter linjens ligning i cirklens:

$$x^2 + (2 - x)^2 = \tfrac{25}{9} \iff x^2 + 4 + x^2 - 4x = \tfrac{25}{9} \iff 18x^2 - 36x + 11 = 0$$

$$\iff x = \frac{6 \pm \sqrt{14}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{14}}{6} .$$

Vi ser, at P's x-koordinat må være $x_P = 1 + \dfrac{\sqrt{14}}{6}$ og y-koordinaten til P er

$$y_P = 2 - x_P = 2 - \left(1 + \frac{\sqrt{14}}{6}\right) = 1 - \frac{\sqrt{14}}{6} .$$

Derfor er afstanden mellem P og K givet ved

$$PK^2 = (x_P - 1)^2 + (y_P - 1)^2 = \left(\tfrac{\sqrt{14}}{6}\right)^2 + \left(-\tfrac{\sqrt{14}}{6}\right)^2 = \tfrac{14}{36} + \tfrac{14}{36} = \tfrac{28}{36} = \tfrac{7}{9} ,$$

og dermed

$$PK = \frac{\sqrt{7}}{3} \quad \text{og} \quad PQ = \frac{2\sqrt{7}}{3} .$$

Da $AB = 2\sqrt{2}$, er den brøkdel af linjestykket, der ligger inden for cirklen

$$\frac{PQ}{AB} = \frac{2\sqrt{7}}{3} : 2\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{7}}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7}\cdot\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{14}}{6} \approx 62{,}4\% .$$