Svar på opgave 2008-89
November 2008

Opgaven:

Tallene a, b, c og k er forskellige fra 0. Der gælder, at

$$k = \frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b} \ .$$

Hvilke værdier kan k antage?

Løsning:

Vi har, at

$$a = k(b + c) \ , \ b = k(c + a) \ , \ c = k(a + b) \ .$$

Addition af disse ligninger giver

$$a + b + c = k(b + c + c + a + a + b) \quad \Leftrightarrow \quad a + b + c = k(2a + 2b + 2c)$$

$$\Leftrightarrow \quad a + b + c = 2k \cdot (a + b + c) \ .$$

Vi deler op i to tilfælde:

I. $a + b + c = 0$. I dette tilfælde er

$$b + c = -a \quad , \quad a + c = -b \quad , \quad a + b = -c \ ,$$

så vi får

$$\frac{a}{b+c} = \frac{a}{-a} = -1 \quad , \quad \frac{b}{c+a} = \frac{b}{-b} = -1 \quad , \quad \frac{c}{a+b} = \frac{c}{-c} = -1 \ ,$$

dvs. $k = -1$.

II. $a + b + c \neq 0$. Her får vi af ligningen, at

$$a + b + c = 2k \cdot (a + b + c) \quad \Leftrightarrow \quad 1 = 2k \quad \Leftrightarrow \quad k = \tfrac{1}{2} \ .$$

Tallet k kan altså antage værdierne -1 og $\tfrac{1}{2}$.