Svar på opgave 2009-100
December 2009

Opgaven:

Bestem de to sidste cifre i tallet

$$a = 7 + 7^2 + 7^3 + \cdots + 7^{2008} + 7^{2009} \ .$$

Løsning:

Vi ser på tallet

$$a = 7 + 7^2 + 7^3 + \cdots + 7^{2008} + 7^{2009} \ ,$$

og vi skal bestemme de sidste to cifre i a. Vi har, at

$$a = (7 + 7^2 + 7^3 + 7^4) + 7^4(7 + 7^2 + 7^3 + 7^4) + \cdots + 7^{2004}(7 + 7^2 + 7^3 + 7^4) + 7^{2009} \ .$$

Her er

$$7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 = 2800 \ ,$$

så

$$a = 2800 \cdot (1 + 7^4 + 7^8 + \cdots + 7^{2004}) + 7^{2009} \ .$$

Det første led ender tydeligvis på 00. Vi skal derfor blot bestemme de sidste to cifre i tallet 7^{2009}. Vi angiver de sidste to cifre i potenserne af 7 i følgende tabel:

n	1	2	3	4	5	6	...
To sidste cifre i 7^n	07	49	43	01	07	49	...

Vi har nemlig, at

$$7^1 = 7 \ , \ 7^2 = 49 \ , \ 7^3 = 343 \ , \ 7^4 = 2401$$

$$7^5 = 16807 \ , \ 7^6 = 117\,649 \ , \ 7^7 = 823\,543 \ , \ 7^8 = 5\,764\,801 \ , \ldots$$

Altså ender $7^1, 7^5, 7^9, \ldots, 7^{2009}$ på cifrene 07, og derfor ender a også på cifrene 07.