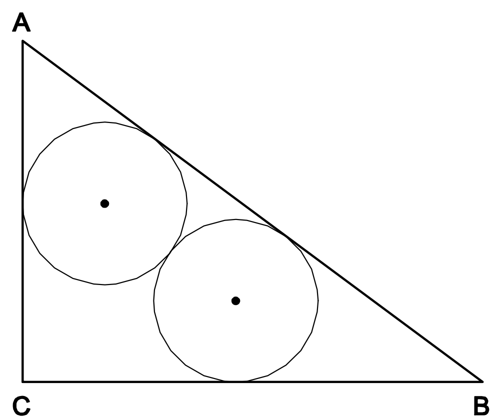
Svar på opgave 2009-91 Januar 2009

Opgaven:

ΔABC er den retvinklede 3-4-5-trekant, dvs.
$AC = 3$, $BC = 4$ og $AB = 5$.
To cirkler med lige store radier tangerer hinanden udvendigt og tangerer desuden hver en katete og hypotenusen i trekanten som vist.

Bestem cirklernes radius.



Løsning:

Vi sætter

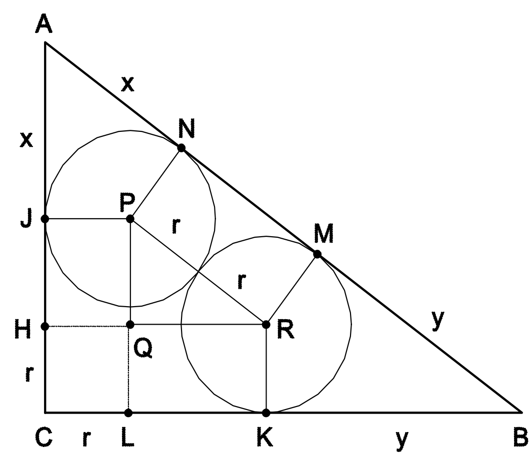
$$x = AN = AJ \quad , \quad y = BM = BK \ ,$$

fordi afstandene fra et punkt uden for en cirkel langs tangenten til røringspunktet er den samme på begge vinkelben.

Så er
$4 = BC = CL + LK + KB = r + QR + y$
hvoraf $QR = 4 - r - y$.

På samme måde er

$$3 = AC = AJ + JH + HC = x + PQ + r$$
hvoraf $PQ = 3 - r - x$.



Endelig er

$$5 = AB = AN + NM + MB = x + PR + y \quad \text{hvoraf} \quad 2r = PR = 5 - x - y \ . \qquad (1)$$

Nu er ΔPQR ensvinklet med ΔABC, så

$$\frac{QR}{PR} = \frac{BC}{AB} \;\Leftrightarrow\; \frac{4-r-y}{2r} = \frac{4}{5} \;\Leftrightarrow\; 8r = 20-5r-5y \;\Leftrightarrow\; 5y = 20-13r \;. \qquad (2)$$

og

$$\frac{PQ}{PR} = \frac{AC}{AB} \;\Leftrightarrow\; \frac{3-r-x}{2r} = \frac{3}{5} \;\Leftrightarrow\; 6r = 15-5r-5x \;\Leftrightarrow\; 5x = 15-11r \;. \qquad (3)$$

Ligning (1) giver ved multiplikation med 5:

$$10r = 25 - 5x - 5y \;,$$

og heri indsættes (2) og (3):

$$10r = 25 - (15 - 11r) - (20 - 13r) \;\Leftrightarrow\; 10r = 25 - 15 + 11r - 20 + 13r \;\Leftrightarrow\; r = \tfrac{5}{7} \;.$$

Nu kunne man forledes til at tro, at der i en vilkårlig retvinklet trekant med siderne a, b og c gælder, at

$$r = \frac{c}{a+b} \;,$$

men ved de samme regninger som oven for kan man vise, at der i almindelighed gælder føl- gende formel for radius r i de to indskrevne cirkler:

$$r = \frac{c\cdot(a+b-c)}{2(a+b)} \;.$$