Svar på opgave 2009-94 April 2009

Opgaven:

Find samtlige naturlige tal *n*, så

$$\frac{2007}{2008} < \frac{n}{n+2} < \frac{2008}{2009}$$

Løsning:

Uligheden $\frac{2007}{2008} < \frac{n}{n+2} < \frac{2008}{2009}$ deler vi op i venstre og højre ulighed.

I. Venstre ulighed. Vi ganger med fællesnævneren 2008(n + 2) på begge sider (i en ulighed er det tilladt at gange med samme positive tal på begge sider):

$$\frac{2007}{2008} < \frac{n}{n+2} \quad \Leftrightarrow \quad 2007(n+2) < 2008n \quad \Leftrightarrow \quad 2007n + 4014 < 2008n \quad \Leftrightarrow \quad n > 4014 .$$

II. Højre ulighed. Vi ganger med fællesnævneren 2009(n + 2) på begge sider:

$$\frac{n}{n+2} < \frac{2008}{2009} \quad \Leftrightarrow \quad 2009n < 2008(n+2) \quad \Leftrightarrow \quad 2009n < 2008n + 4016 \quad \Leftrightarrow \quad n < 4016 .$$

Vi har nu fundet, at det søgte tal n skal opfylde, at n > 4014 og n < 4016. Altså er den eneste mulighed n = 4015. Vi har altså, at

$$\frac{2007}{2008} < \frac{4015}{4017} < \frac{2008}{2009} \quad \text{eller} \quad \frac{4014}{4016} < \frac{4015}{4017} < \frac{4016}{4018} \quad .$$

I den sidste dobbeltulighed er tællerens og nævnerens værdier øget med 1 fra venstre mod højre.

I almindelighed vokser en *ægte* brøk (dvs. en brøk, hvor tælleren er mindre end nævneren), hvis tæller og nævner begge vokser med 1. Vi har nemlig, at

$$\frac{a}{b} < \frac{a+1}{b+1} \quad \Leftrightarrow \quad a(b+1) < b(a+1) \quad \Leftrightarrow \quad ab + a < ab + b \quad \Leftrightarrow \quad a < b \quad , \qquad (1)$$

hvilket jo er sandt, når brøken er ægte.

For uægte brøker (tælleren større end nævneren) forholder det sig omvendt. Fx er jo $\frac{7}{3} > \frac{8}{4}$. Vi kan som bevis foretage tilsvarende regninger som i (1).