

Svar på opgave 2009-96

Juni 2009

Opgaven:

Bestem samtlige løsninger til ligningen

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{2009^2} + 2009^2 .$$

Samtlige mellemregninger skal anføres og begrundes.

Løsning:

Vi ser straks, at $x = \pm 2009$ er løsninger, fordi

$$(\pm 2009)^2 + \frac{1}{(\pm 2009)^2} = 2009^2 + \frac{1}{2009^2} .$$

Ligningen omskrives sådan:

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{2009^2} + 2009^2 &\Leftrightarrow x^2 - 2009^2 = \frac{1}{2009^2} - \frac{1}{x^2} \\ \Leftrightarrow x^2 - 2009^2 &= \frac{x^2 - 2009^2}{2009^2 \cdot x^2} . \end{aligned}$$

Vi forudsætter, at $x \neq \pm 2009$, så vi kan dividere på begge sider af lighedstegnet med $x^2 - 2009^2$, så ligningen er ensbetydende med

$$1 = \frac{1}{2009^2 \cdot x^2} \Leftrightarrow 2009^2 \cdot x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2009^2} \Leftrightarrow x = \frac{\pm 1}{2009} .$$

Dermed har vi fundet fire løsninger til ligningen, nemlig

$$x = \pm 2009 \quad \text{og} \quad x = \frac{\pm 1}{2009} .$$