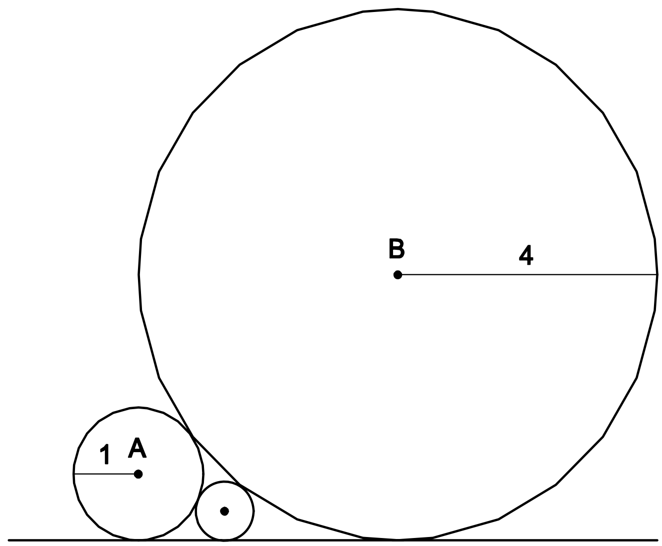
Svar på opgave 2009-98
Oktober 2009

Opgaven:

En cirkel med radius 1 har centrum i A og tangerer udvendigt en cirkel med radius 4 og centrum i B. En tredje cirkel tangerer de første to cirkler og tangerer desuden de to førstes fælles tangent som vist.

Beregn radius i den tredje cirkel.



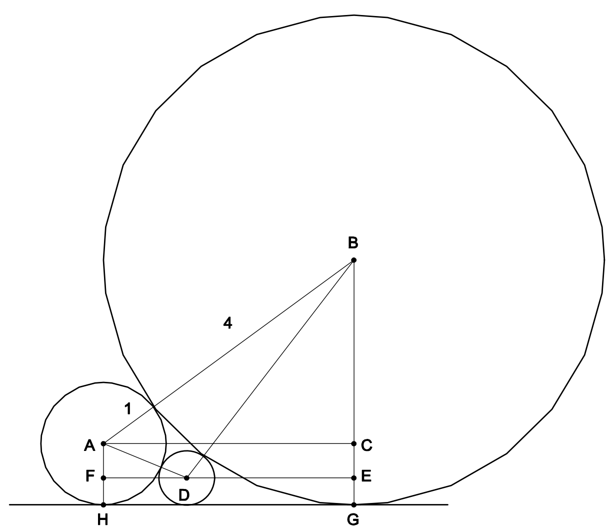
Løsning:

En vandret linje gennem *A* skærer den lodrette linje gennem *B* i *C*. Desuden er *D* centrum i den lille cirkel. En vandret linje gennem *D* skærer de lodrette linjer gennem *B* og *A* i *E* og *F*. Linjerne *BE* og *AE* skærer tangenten til cirklerne i *G* og *H*.
Nu er

$BC = BG - CG = BG - AH = 4 - 1 = 3$,

og da $AB = 5$ får vi i ΔABC ved Pythagoras, at $AC^2 = AB^2 - BC^2 = 5^2 - 3^2 = 4^2$

så $AC = 4$.



$$AC^2 = AB^2 - BC^2 = 5^2 - 3^2 = 4^2 \quad \text{så} \quad AC = 4\,.$$

Lad nu x være den søgte radius i den lille cirkel. Så har vi i ΔBED, at $BD = 4 + x$ og

$$BE = BG - EG = 4 - x\;,$$

og Pythagoras giver

$$DE^2 = BD^2 - BE^2 = (4 + x)^2 - (4 - x)^2 = 16x \quad \text{hvoraf} \quad DE = 4\sqrt{x}\;.$$

I ΔADF er $AD = 1 + x$ og

$$AF = AH - FH = 1 - x\,,$$

så Pythagoras giver

$$FD^2 = AD^2 - AF^2 = (1 + x)^2 - (1 - x)^2 = 4x \quad \text{hvoraf} \quad FD = 2\sqrt{x}\;.$$

Dermed er

$$4 = AC = FE = FD + DE = 2\sqrt{x} + 4\sqrt{x} = 6\sqrt{x}\;,$$

så vi har

$$6\sqrt{x} = 4 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{x} = \tfrac{2}{3} \;\Leftrightarrow\; x = \tfrac{4}{9}\;.$$

Generalisation.

Vi kan foretage de samme regninger, hvis vi betegner den store cirkels radius med R og den lilles med r.

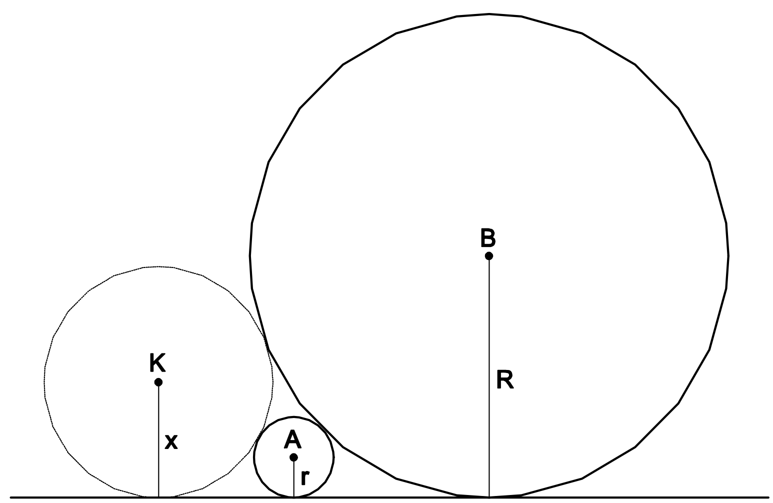
Så får vi i ΔABC, at

$AC^2 = AB^2 - BC^2 =$

$(R + r)^2 - (R - r)^2 =$

$R^2 + r^2 + 2Rr - (R^2 + r^2 - 2Rr) =$

$4Rr$,



Så får vi i ΔABC, at

$$AC^2 = AB^2 - BC^2 = (R + r)^2 - (R - r)^2 = R^2 + r^2 + 2Rr - (R^2 + r^2 - 2Rr) = 4Rr\,,$$

så

$$AC = \sqrt{4Rr} = 2\sqrt{Rr}\;.$$

Hvis vi betegner den søgte radius i den lille cirkel med x, får vi i ΔDFA at

$$DF^2 = AD^2 - AF^2 = (r + x)^2 - (r - x)^2 = 4rx \quad \text{så} \quad DF = 2\sqrt{rx}\;.$$

I ΔABE er $DE^2 = DB^2 - BE^2 = (R+x)^2 - (R-x)^2 = 4Rx$ så $DE = 2\sqrt{Rx}$.

Endelig får vi

$$AC = DF + DE \quad \Leftrightarrow \quad 2\sqrt{Rx} + 2\sqrt{rx} = 2\sqrt{Rr} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{R}+\sqrt{r}\right) = \sqrt{Rr}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{x} = \frac{\sqrt{Rr}}{\sqrt{R}+\sqrt{r}} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{Rr}{R+r+2\sqrt{Rr}} \ .$$

Hvis $R = 4$ og $r = 1$ som i opgaven, får vi som ønsket

$$x = \frac{4\cdot 1}{4+1+2\sqrt{4\cdot 1}} = \frac{4}{4+1+2\cdot 2} = \frac{4}{9} \ .$$

Endnu en generalisation.

Hvis to cirkler tangerer hinanden udvendigt, findes der endnu en cirkel, der tangerer dem begge og deres fællestangent. Dette er en større cirkel end den, vi har set på i opgaven. Hvis vi tegner denne cirkel og beregner dens radius med x ser vi af fi- guren, at de tre cirlklers indbyrdes beliggenhed er den samme som før, blot er cirklerne med radierne r og x (den ukendte radius) byttet om. Vi har altså i dette tilfælde, at de tre cirklers radier opfylder

$$\sqrt{r} = \frac{\sqrt{Rx}}{\sqrt{R}+\sqrt{x}} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{Rr} + \sqrt{rx} = \sqrt{Rx}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{R}-\sqrt{r}\right) = \sqrt{Rr} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x} = \frac{\sqrt{Rr}}{\sqrt{R}-\sqrt{r}} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{Rr}{R+r-2\sqrt{Rr}} \ .$$