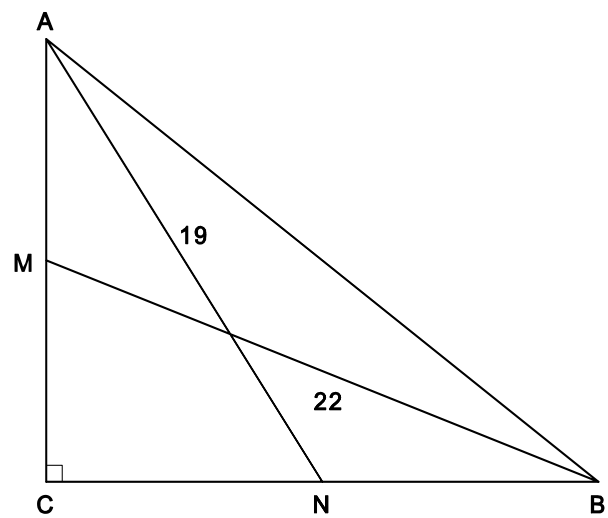
Svar på opgave 2010-101 Januar 2010

Opgaven:

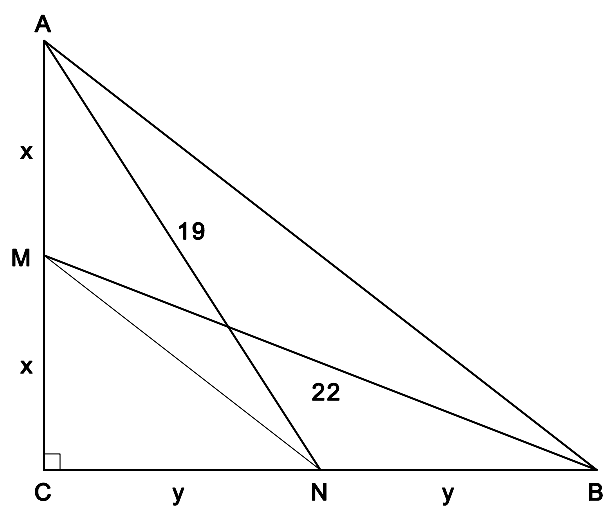
ΔABC er retvinklet og M og N er midtpunkter af kateterne AC og BC.

Det oplyses, at $AN = 19$ og $BM = 22$.

Bestem længden af hypotenusen AB.



Løsning:



I den retvinklede ΔABC er AN og BM medianer, og det oplyses, at $AN = 19$ og $BM = 22$.
Vi skal bestemme længden af hypotenusen AB.
Vi sætter for nemheds skyld

$$y = CN = NB \quad \text{og} \quad x = AM = MC \ .$$

I den retvinklede ΔCMB giver Pythagoras, at

$$x^2 + (2y)^2 = 22^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 4y^2 = 484 \ .$$

I den retvinklede ΔCNA får vi

$$y^2 + (2x)^2 = 19^2 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 + y^2 = 361 \ .$$

Ved addition fås

$$5x^2 + 5y^2 = 845 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = 169 \ .$$

I ΔCMN er

$$MN^2 = x^2 + y^2 = 169 \quad \Leftrightarrow \quad MN = 13 \ .$$

Nu er ΔABC og ΔMNC ensvinklede i forholdet 2:1, så $AB = 2 \cdot MN = 26$.
Alternativt kunne vi ved direkte regning få, at

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = (2x)^2 + (2y)^2 = 4(x^2 + y^2) = 4 \cdot 169 \ ,$$

så vi får

$$AB = \sqrt{4 \cdot 169} = 2 \cdot 13 = \underline{\underline{26}} \ .$$