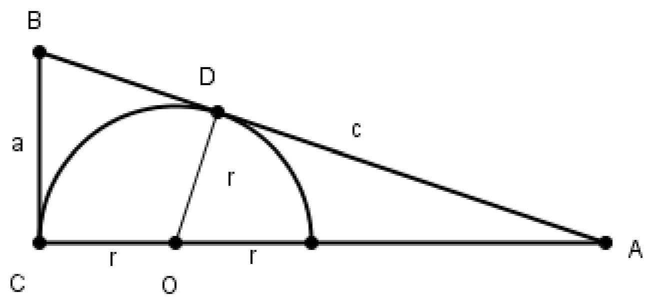
Svar på opgave 2010-103
Marts 2010

Opgaven:

I den retvinklede ΔABC ligger en halvcirkels diameter på kateten AC så den tangerer BC i C. Desuden tangerer den hypotenusen AB i D.



Bestem radius r i halvcirklen udtrykt ved sidelængderne a, b og c i trekanten.

Løsning:

En halvcirkel med centrum O har sin diameter på den ene katete i en retvinklet trekant således, at cirklen tangerer BC i C og desuden tangerer den hypotenusen i D. Vi vil bestemme halvcirklens radius r udtrykt ved sidelængderne a, b og c i trekanten.

Vi har, at BC og BD er tangenter til cirklen fra punktet B uden for cirklen. Derfor er de to tangentstykker lige lange: $BC = BD = a$ og dermed $AD = c - a$.

Nu er ΔADO og ΔACB ensvinklede, fordi de har vinkel A fælles og de begge er retvinklede. Altså er

$$\frac{OD}{AD} = \frac{BC}{AC} \quad \text{eller} \quad \frac{r}{c-a} = \frac{a}{b} \ .$$

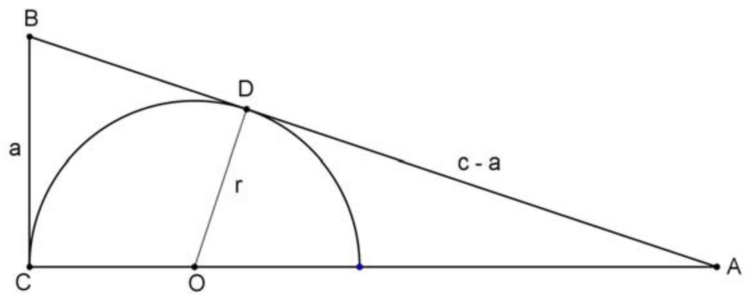
Heraf får vi

$$r = \frac{a(c-a)}{b} \quad ,$$

som er den søgte formel for r udtrykt ved sidelængderne a, b og c.

Vi kan få et andet udtryk for r ved at forlænge brøken med $c + a$ og benytte Pythagoras sætning:

$$r = \frac{a(c-a)}{b} = \frac{a(c-a)(c+a)}{b(c+a)} = \frac{a(c^2-a^2)}{b(c+a)} = \frac{ab^2}{b(c+a)} = \frac{ab}{c+a} \ .$$



Vi kan også bestemme r udelukkende ved brug af Pythagoras i ΔADO, hvor

$$OD = r \quad , \quad AD = c - a \quad , \quad OA = AC - OC = b - r \ .$$

Altså kan vi regne sådan:

$$r^2 + (c - a)^2 = (b - r)^2 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 + c^2 + a^2 - 2ac = b^2 + r^2 - 2br$$

$$\Leftrightarrow \quad r^2 + a^2 + b^2 + a^2 - 2ac = b^2 + r^2 - 2br \quad \Leftrightarrow \quad 2a^2 - 2ac = -2br$$

$$\Leftrightarrow \quad br = ac - a^2 \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{ac - a^2}{b} = \frac{a(c-a)}{b} \ .$$