Svar på opgave 2010-104
April 2010

Opgaven:

De reelle tal a, b og c, der ikke er 0, opfylder at

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0\ .$$

Vis, at så er

$$\frac{bc}{a^2}+\frac{ac}{b^2}+\frac{ab}{c^2}=3\ .$$

Løsning:

Ligningen

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$$

er ensbetydende med

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=-\frac{1}{c}$$

og når vi opløfter til 3. potens på begge sider af lighedstegnet, får vi

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^3=\left(-\frac{1}{c}\right)^3 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{a^3}+\frac{3}{a^2b}+\frac{3}{ab^2}+\frac{1}{b^3}=-\frac{1}{c^3}\ ,$$

hvoraf

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=-\frac{3}{a^2b}-\frac{3}{ab^2}=-\frac{3}{ab}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=-\frac{3}{ab}\cdot\left(-\frac{1}{c}\right)=\frac{3}{abc}\ .$$

Vi har altså, at

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=\frac{3}{abc}\ .$$

Vi ganger med abc på begge sider og får

$$\frac{abc}{a^3}+\frac{abc}{b^3}+\frac{abc}{c^3}=3 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{bc}{a^2}+\frac{ac}{b^2}+\frac{ab}{c^2}=3\ .$$