Svar på opgave 2010-105
Maj 2010

Opgaven:

Bestem alle naturlige tal n, så

$$\frac{14}{29} < \frac{6}{n} < \frac{7}{12} \quad .$$

Samtlige løsninger skal være dokumenteret.

Løsning:

1. metode

Vi skaffer fælles tæller, som er 42. Den første brøk forlænges med 3, den anden med 7 og den tredje med 6, så dobbeltuligheden kan skrives sådan:

$$\frac{42}{87} < \frac{42}{7n} < \frac{42}{72} \quad .$$

Hvis denne størrelsesorden mellem brøkerne skal gælde, må nævnerne opfylde, at

$$72 < 7n < 87 \quad ,$$

og division med 7 giver

$$10\tfrac{2}{7} < n < 12\tfrac{3}{7} \quad .$$

Da n skal være hel, har vi kun mulighederne $n = 11$ og $n = 12$. Vi har altså, at

$$\frac{14}{29} < \frac{6}{11} < \frac{7}{12} \quad \text{og} \quad \frac{14}{29} < \frac{6}{12} < \frac{7}{12} \quad .$$

Ved udregning får vi, værdierne $n = 10$ og $n = 13$ giver:

$$\frac{6}{10} > \frac{7}{12} \quad \text{og} \quad \frac{6}{13} < \frac{14}{29} \quad .$$

altså brøker uden for intervallet mellem $\frac{14}{29}$ og $\frac{7}{12}$.

2. metode

Vi kan gange den givne dobbeltulighed med fællesnævneren $29 \cdot 12 \cdot n$, og får

$$29 \cdot 12 \cdot n \cdot \frac{14}{29} < 29 \cdot 12 \cdot n \cdot \frac{6}{n} < 29 \cdot 12 \cdot n \cdot \frac{7}{12}$$

hvoraf

$$14 \cdot n \cdot 12 < 6 \cdot 29 \cdot 12 < 7 \cdot 29 \cdot n \quad .$$

Vi skal altså løse ulighederne

$$14\cdot 12\cdot n < 6\cdot 29\cdot 12 \quad\Leftrightarrow\quad 14n < 6\cdot 29 \quad\Leftrightarrow\quad 7n < 87 \quad\Leftrightarrow\quad n < 12\tfrac{3}{7}$$

og

$$6\cdot 29\cdot 12 < 7\cdot 29\cdot n \quad\Leftrightarrow\quad 6\cdot 12 < 7n \quad\Leftrightarrow\quad 7n > 72 \quad\Leftrightarrow\quad n > 10\tfrac{2}{7}\ ,$$

dvs. vi finder igen de mulige værdier n = 11 og n = 12.