

Svar på opgave 2010-106

Juni 2010

Opgaven:

I en regulær 5-kant er vinklen mellem to nabokanter $v = 108^\circ$ og i en regulær 8-kant er vinklen mellem to nabokanter $w = 135^\circ$. Forholdet mellem vinklerne er $v : w = 108 : 135 = 4 : 5$.

Vinklen mellem to nabokanter i en regulær m -kant er v og vinklen mellem to nabokanter i en regulær n -kant er w . Find samtlige par af kanttal m og n , så der om vinklerne mellem nabokanter gælder, at $v : w = 2 : 3$.

I eksemplet ovenfor ser vi, at tallene $m = 5$ og $n = 8$ ikke kan bruges.

Løsning:

En regulær k -kant kan deles i k ligebenede trekanter med topvinkler i centrum for den omskrevne cirkel. Topvinklen i en sådan trekant har gradstørrelsen $\frac{360^\circ}{k}$, så de to vinkler

ved grundlinjen tilsammen er $180 - \frac{360}{n}$.

Vi tillader os her at udelade gradtegnet. Sådanne to vinkler danner netop til sammen vinklen i den regulære k -kant, så den er $180 - \frac{360}{n}$.

Nu gælder så efter betegnelserne i opgaven, at

$$v = 180 - \frac{360}{m} = 180 \cdot \left(1 - \frac{2}{m}\right) \quad \text{og} \quad w = 180 - \frac{360}{n} = 180 \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right).$$

og dermed

$$\begin{aligned} \frac{v}{w} = \frac{2}{3} &\Leftrightarrow 3v = 2w \Leftrightarrow 3 \cdot 180 \cdot \left(1 - \frac{2}{m}\right) = 2 \cdot 180 \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \\ \Leftrightarrow 3 \cdot \left(1 - \frac{2}{m}\right) &= 2 \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \Leftrightarrow 3 - \frac{6}{m} = 2 - \frac{4}{n} \Leftrightarrow 3mn - 6n = 2mn - 4m \\ \Leftrightarrow 4m - 6n + mn &= 0 \Leftrightarrow 4m + n(m - 6) = 0 \Leftrightarrow n = \frac{4m}{6 - m}. \end{aligned}$$

Da n skal være et helt positivt tal, skal nævneren være positiv og hel, så vi har kun mulighederne $m = 3, 4$ og 5 .

Værdien $m = 3$ giver $n = \frac{12}{3} = 4$, værdien $m = 4$ giver $n = \frac{16}{2} = 8$ og $m = 5$ giver

$n = \frac{20}{1} = 20$. Dermed har vi de sammenhørende værdier af m og n :

$$(m,n) : (3,4) , (4,8) , (5,20) .$$

Dette svarer med almindelige ord til, at den regulære trekant og kvadratet har et vinkelforhold på 2:3, og det samme gælder for kvadratet og den regulære 8-kant og for den regulære 5-kant og den regulære 20-kant. Vi kan for morskabs skyld udregne vinklerne i disse regulære polygoner:

Regulær k -kant	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 8$	$k = 20$
Vinkel	60°	90°	108°	135°	162°

De forhold, det drejer sig om, er så

$$\frac{60}{90} = \frac{2}{3} , \quad \frac{90}{135} = \frac{2}{3} , \quad \frac{108}{162} = \frac{2}{3} .$$