

Svar på opgave 2010-107

September 2010

Opgaven:

Bestem fire brøker a , b , c og d med encifrede tællere og nævnere, så

$$\frac{7}{9} < a < b < c < d < \frac{8}{9} .$$

Løsning:

Hvis $\frac{p}{q}$ er en brøk mellem $\frac{7}{9}$ og $\frac{8}{9}$, er

$$\frac{7}{9} < \frac{p}{q} < \frac{8}{9} .$$

Nævneren q kan ikke være 2, 3 eller 4, fordi brøkerne $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$ og $\frac{3}{4}$ ikke ligger mellem $\frac{7}{9}$ og $\frac{8}{9}$.

Hvis $q = 5$, er

$$\frac{7}{9} < \frac{p}{5} < \frac{8}{9} \Leftrightarrow \frac{35}{45} < \frac{9p}{45} < \frac{40}{45} \Leftrightarrow 35 < 9p < 40 ,$$

så $p = 4$ er den eneste mulighed. Dermed er $\frac{4}{5}$ en brugbar brøk.

Hvis $q = 6$ er

$$\frac{7}{9} < \frac{p}{6} < \frac{8}{9} \Leftrightarrow \frac{14}{18} < \frac{3p}{18} < \frac{16}{18} \Leftrightarrow 14 < 3p < 16 ,$$

hvoraf $p = 5$, så $\frac{5}{6}$ er en brugbar brøk.

Hvis $q = 7$ er

$$\frac{7}{9} < \frac{p}{7} < \frac{8}{9} \Leftrightarrow \frac{49}{63} < \frac{9p}{63} < \frac{56}{63} \Leftrightarrow 49 < 9p < 56 ,$$

hvoaf $p = 6$. Altså er $\frac{6}{7}$ en brugbar brøk.

Hvis $q = 8$ er

$$\frac{7}{9} < \frac{p}{8} < \frac{8}{9} \Leftrightarrow \frac{56}{72} < \frac{9p}{72} < \frac{64}{72} \Leftrightarrow 56 < 9p < 64,$$

hvoraf $p = 7$, så $\frac{7}{8}$ er en brugbar brøk.

Værdien $q = 9$ kan ikke bruges, da 9 allerede er nævner i brøkerne $\frac{7}{9}$ og $\frac{8}{9}$. I alt har vi fundet brøkerne

$$\frac{4}{5}, \frac{5}{6} \text{ og } \frac{6}{7},$$

og vi har vist, at disse er de eneste brøker med encifret nævner mellem $\frac{7}{9}$ og $\frac{8}{9}$. Dette er mere end forlangt i opgaveteksten - dér efterspurgtes jo kun tre af (muligvis) flere.

Vi ser, at $\frac{7}{9} < \frac{4}{5} < \frac{5}{6} < \frac{6}{7} < \frac{8}{9}$.