

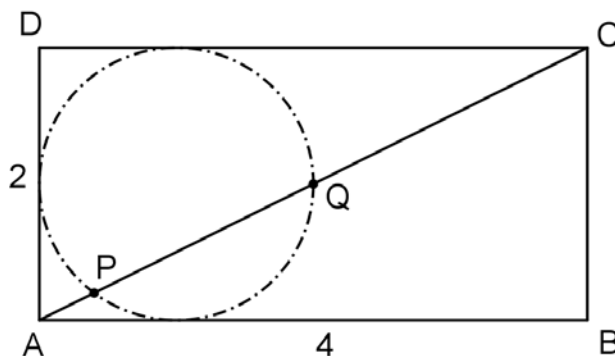
# Svar på opgave 2010-108

## Oktober 2010

### Opgaven:

I rektanglet  $ABCD$  er  $AB = 4$  og  $AD = 2$ .

En cirkel tangerer tre af siderne som vist og diagonalen  $AC$  skærer cirklen i  $P$  og  $Q$ .  
Beregn længden af linjestykket  $PQ$ .



### Løsning:

Vi ser, at  $Q$  er midtpunktet af rektanglet, og hvis  $O$  er cirkelns centrum er  $OQ$  parallel med  $AB$ . Lad  $R$  være midtpunktet af korden  $PQ$ , så  $\angle ORQ$  er ret. Desuden gælder efter Pytha- goras

$$CA = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \text{ ,}$$

og radius i cirklen er  $OQ = 1$ .

Vi ser på de to trekanter  $ABC$  og  $QRO$ . Her er  $\angle CAB = \angle OQR$  og desuden er de to trekanter retvinklede. Derfor er de ensvinklede med sideforholdet

$$\frac{AB}{QR} = \frac{BC}{RO} = \frac{CA}{OQ} \quad \text{eller} \quad \frac{4}{QR} = \frac{2}{RO} = \frac{2\sqrt{5}}{1} \text{ .}$$

Heraf får vi

$$\frac{4}{QR} = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow QR = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ .}$$

Nu er  $R$  midtpunkt af  $PQ$ , så

$$PQ = 2 \cdot QR = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5} \approx 1,789.$$

Flere lødere benytter analytisk geometri, dvs. koordinatregning, til at bestemme koordinater til  $P$  og  $Q$  og dermed udregne længden af  $PQ$ .

