

Svar på opgave 2010-109

November 2010

Opgaven:

Bestem samtlige naturlige tal n , så $\sqrt{13-\sqrt{n-13}}$ er et naturligt tal.

Fx er $n = 22$ ikke en løsning, fordi

$$\sqrt{13-\sqrt{22-13}} = \sqrt{13-\sqrt{9}} = \sqrt{13-3} = \sqrt{10}$$

ikke er et naturligt tal.

Løsning:

Vi ser på tallet

$$s = \sqrt{13-\sqrt{n-13}} .$$

Vi må forudsætte, at $n \geq 13$. Vi sætter

$$t = \sqrt{n-13}$$

så

$$t^2 = n - 13 \quad \text{eller} \quad n = t^2 + 13$$

og

$$s = \sqrt{13-t} \quad \text{hvoraf} \quad s^2 = 13-t .$$

Vi har, at $t \geq 0$, og da s^2 er positiv eller 0, er $t \leq 13$. Desuden er $s^2 \leq 13$. Altså har vi kun mulighederne $s = 1, 2$ eller 3 .

Hvis $s = 1$, er

$$1 = 13 - t \Leftrightarrow t = 12 \Leftrightarrow n - 13 = 12^2 \Leftrightarrow n = 157 .$$

Hvis $s = 2$, er

$$4 = 13 - t \Leftrightarrow t = 9 \Leftrightarrow n - 13 = 9^2 \Leftrightarrow n = 94 .$$

Hvis $s = 3$, er

$$9 = 13 - t \Leftrightarrow t = 4 \Leftrightarrow n - 13 = 4^2 \Leftrightarrow n = 29 .$$

Kontrol giver:

$$\sqrt{13-\sqrt{157-13}} = \sqrt{13-\sqrt{144}} = \sqrt{13-12} = \sqrt{1} = 1$$

$$\sqrt{13-\sqrt{94-13}} = \sqrt{13-\sqrt{81}} = \sqrt{13-9} = \sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{13-\sqrt{29-13}} = \sqrt{13-\sqrt{16}} = \sqrt{13-4} = \sqrt{9} = 3 .$$