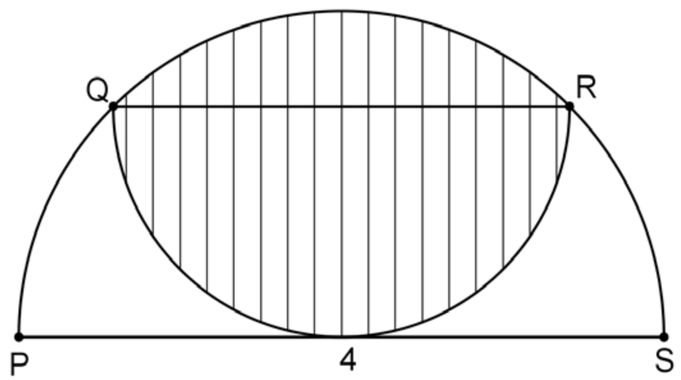
Svar på opgave 2010-110 December 2010

Opgaven:

En halvcirkel har diameter $PS = 4$. Punkterne Q og R ligger på halvcirklen, så QR er parallel med PS. Med QR som diameter tegnes en halvcirkel, der tangerer PS. Bestem arealet af det skraverede område.



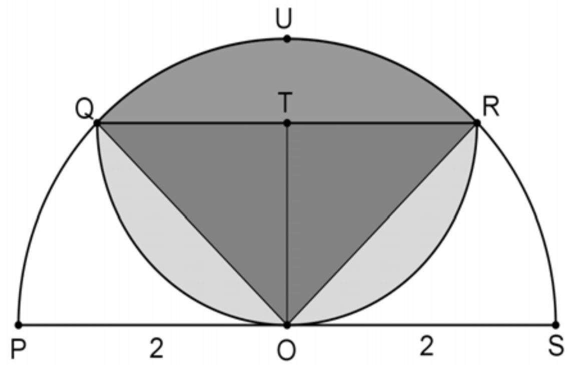
Løsning:

Se figur på næste side.

O er midtpunkt af PS. Vi trækker linjerne OR og OQ Da O ligger på den lille cirkel og QR er diameter, er $\angle QOR$ ret.

OQ og OR er radier i den store cirkel, så $OQ = OR = 2$. Så er $QORU$ en kvartcirkel med radius 2, så dette områdes areal er

$$\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 2^2 = \pi \quad .$$



Vi mangler derefter at finde arealerne af de to cirkelafsnit i den lille cirkel med T som centrum. De er kongruente (helt ens), så vi finder blot arealet af afsnittet QO.
Arealet af dette er arealet af cirkeludsnittet *TQO* minus arealet af ΔTQO.
Cirkeludsnittet *TQO* er en kvartcirkel.med radius $TO = TQ$. Da $OQ = 2$ giver Pythagoras sætning i ΔTQO, at

$$TQ^2 + TO^2 = QO^2 \quad \Leftrightarrow \quad TO^2 + TO^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 2TO^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad TO^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad TO = \sqrt{2} \ .$$

Arealet af kvartcirklen er derfor

$$\tfrac{1}{4} \cdot \pi \cdot \sqrt{2}^2 = \tfrac{1}{2}\pi \ .$$

Da $OQ = 2$ er ΔTQO en fjerdedel af kvadratet med *QO* og *OR* som sider. Kvadratets areal er 4, så arealet af ΔTQO er 1.
Dermed er det søgte cirkelafsnits areal $\tfrac{1}{2}\pi - 1$. De to cirkelafsnit har altså et samlet areal på $\pi - 2$.
Endelig har det søgte areal størrelsen.

$$\pi + \pi - 2 = \underline{\underline{2\pi - 2}}$$