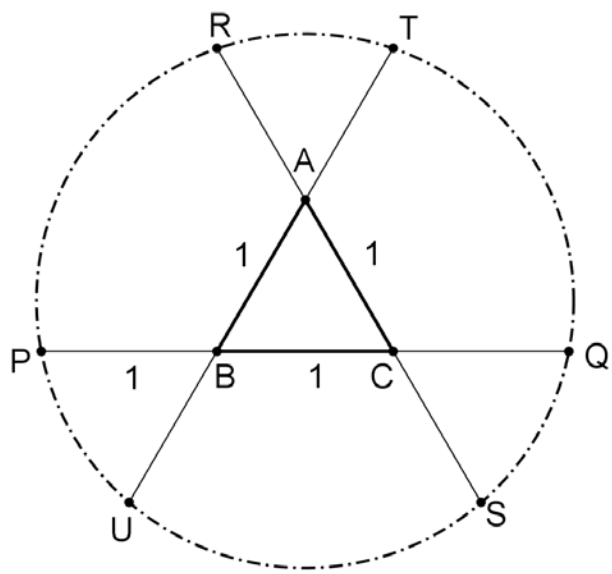
Svar på opgave 2011-112
Februar 2011

Opgaven:

ΔABC er ligesidet med sidelængden 1. Siderne forlænges med 1 enhed til begge sider til punkterne P, Q, R, S, T og U, hvor altså

$$AR = AT = BP = BU = CQ = CS = 1$$

Bestem radius i den cirkel, der går gennem de seks punkter.



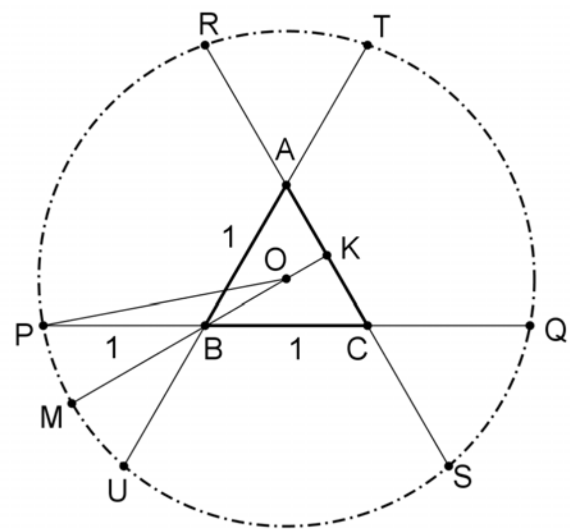
Løsning:

I den ligesidede ΔABC er O centrum, dvs. O er skæringspunkt for medianer, vinkelhalveringslinjer og højder, som falder sammen. O er også centrum for cirklen gennem P, Q, R, S, T og U.

1. metode

Linjen *OB* skærer skærer *AC* i *K* og cirklen i *M*, og da *OK* er vinkelret på *AC*, får vi i den retvinklede Δ*BKC*, at

$$BK^2 + KC^2 = BC^2 \quad \Leftrightarrow \quad BK^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = 1^2 \quad \Leftrightarrow \quad BK^2 = \tfrac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad BK = \frac{\sqrt{3}}{2} .$$



Vi forbinder *O* og *P*. Radius *r* i cirklen er da *OP*. Vi har, at $\angle ABC = 60°$, så
$\angle ABO = 30°$
og dermed

$$\angle PBO = \angle PBA + \angle ABO = 120° + 30° = 150° .$$

Desuden er $BO = \frac{2}{3} \cdot BK$, fordi *O* er medianernes skæringspunkt i Δ*ABC*, dvs.

$$BO = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} .$$

Cosinusrelationen i Δ*PBO* giver

$$PO^2 = PB^2 + BO^2 - 2 \cdot PB \cdot BO \cdot \cos \angle PBO$$
$$\Leftrightarrow \quad r^2 = 1 + \frac{1}{3} - 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \cos 150° .$$

Nu er

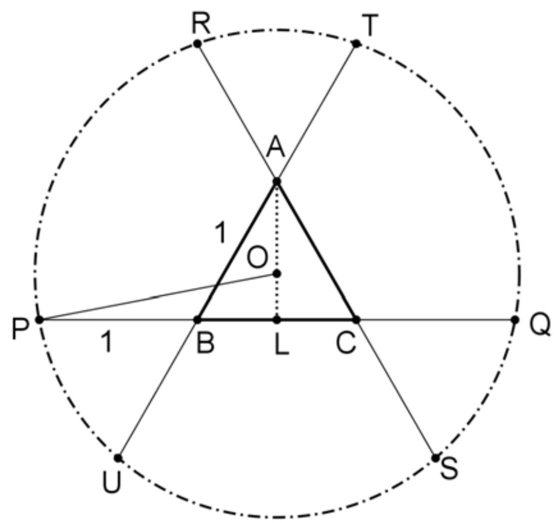
$$\cos 150° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

så

$$r^2 = 1 + \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + \frac{1}{3} + 1 = \frac{7}{3} \ .$$

Heraf fås

$$\underline{\underline{r = \sqrt{\frac{7}{3}}}} \ .$$



2. metode

Alternativt kan vi forbinde O med midtpunktet L af siden BC. Så er OL $\frac{1}{3}$ af medianen AL, så vi får

$$OL = \frac{1}{3} AL = \frac{1}{3} BK = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6} \ .$$

Desuden er

$$PL = PB + BL = 1 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2} \ .$$

Den retvinklede ΔOLP giver så

$$r^2 = OP^2 = OL^2 + PL^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{36} + \frac{9}{4} = \frac{7}{3} \ ,$$

og vi får igen

$$\underline{\underline{r = \sqrt{\frac{7}{3}}}} \ .$$