Svar på opgave 2011-113 Marts 2011

Opgaven:

Findes der hele, positive tal a, b og c, så

$$(a+b)(b+c)(c+a) = 340 \ ?$$

Find dem i givet fald.

Løsning:

I ligningen

$$(a+b)(b+c)(c+a) = 340$$

hvor a, b og c er hele positive tal, er *summen* af faktorerne

$$(a+b)+(b+c)+(c+a) = 2(a+b+c)\ ,$$

og dette tal er lige. Når summen af tre hele positive tal er lige, har vi følgende muligheder:

I. Alle tre tal er lige
II. Et tal er lige og to er ulige

Vi behandler tilfældene hver for sig.

I. Alle tre faktorer er lige

I dette tilfælde er produktet af faktorerne deleligt med 8, fordi hver faktor er delelig med 2. Men da 340 ikke er delelig med 8, findes ingen løsninger i dette tilfælde.

II. En faktor er lige og to ulige

Tallet 340 har i dette tilfælde kun en opløsning som produkt af faktorer (bortset fra række- følge), nemlig

$$340 = 4 \cdot 5 \cdot 17 \ .$$

Vi har så

$$a+b=4$$
$$b+c=5$$
$$c+a=17\ .$$

Af den første ligning følger, at $a < 4$ og af den anden $c < 5$. Men så er $a + c < 9$, hvilket er i strid med den tredje ligning. Heller ikke i dette tilfælde har ligningen en løsning.

Alt i alt findes ingen hele, positive tal a, b og c, som passer i den angivne ligning.

Bemærkning

Hvis vi i ligningen erstatter 340 med 360, får vi

$$(a+b)(b+c)(c+a) = 360 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5\ .$$

De samme to tilfælde opstår:

I. Alle tre faktorer er lige

Vi har kun en mulighed for dette (bortset fra rækkefølgen af faktorerne), nemlig

$$\begin{aligned} a+b &= 6 \\ b+c &= 6 \\ c+a &= 10\ . \end{aligned}$$

Trækkes den anden ligning fra den første fås $a - c = 0$, så vi har systemet

$$\begin{aligned} a-c &= 0 \\ a+c &= 10 \end{aligned}$$

med løsningerne $a = 5$, $c = 5$. Så bliver $b = 1$ og vi har fundet en løsning:

$$a = 5\ ,\ b = 1\ ,\ c = 5\ .$$

II. En faktor er lige og to ulige

Vi får her to muligheder. Den ene er opløsningen $360 = 8\cdot 3\cdot 15$:

$$\begin{aligned} a+b &= 8 \\ b+c &= 3 \\ c+a &= 15\ . \end{aligned}$$

Af den første ligning følger, at $a < 8$ og af den anden at $c < 3$. Altså er $a + c < 11$, hvilket er i strid med den tredje ligning.

Den anden mulighed benytter, at $360 = 8\cdot 5\cdot 9$, så vi får

$$\begin{aligned} a+b &= 8 \\ b+c &= 5 \\ c+a &= 9\ . \end{aligned}$$

Trækkes den anden ligning fra den første, fås $a - c = 3$, så vi har systemet

$$\begin{aligned} a-c &= 3 \\ a+c &= 9\ , \end{aligned}$$

hvilket giver $a = 6$ og $c = 3$. Derefter er $b = 2$. Vi har dermed fundet endnu en løsning:

$$a = 6\ ,\ b = 2\ ,\ c = 3\ .$$