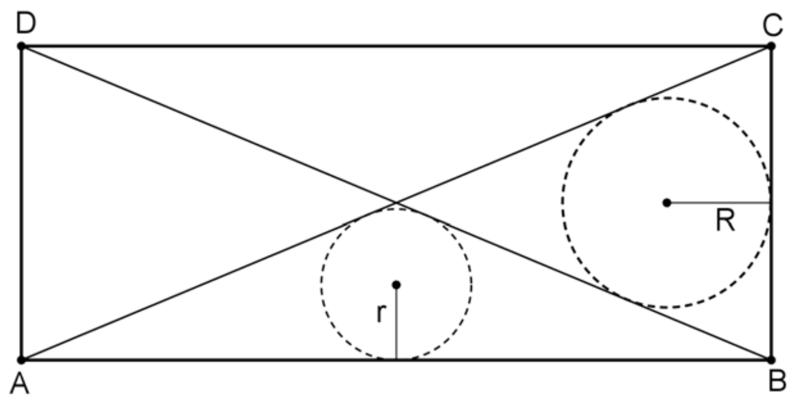
Svar på opgave 2011-114
April 2011

Opgaven:

Forholdet mellem sidelængderne i rektanglet *ABCD* er *AB* : *BC* = 12 : 5.
Diagonalerne deler rektanglet i fire trekanter som vist.
I to af trekanterne, der har en side fælles, tegnes de indskrevne cirkler.
Bestem forholdet *R* : *r* mellem radierne *R* og *r* i den store og den lille cirkel.



Løsning:

1. metode

De to cirkler er indskrevet i ligebenede trekanter. Derfor finder vi først en formel for radius for den indskrevne cirkel i en sådan trekant.

På figuren herunder er ΔABC ligebenet og sidelængderne er

$$AB = AC = p \quad \text{og} \quad BC = q \ .$$

Centrum for den indskrevne cirkel er *O* og dens radius er *r*. Desuden er *h* højden fra *A*, så $AO = h - r$, og *D* er højdens fodpunkt på *BC*.

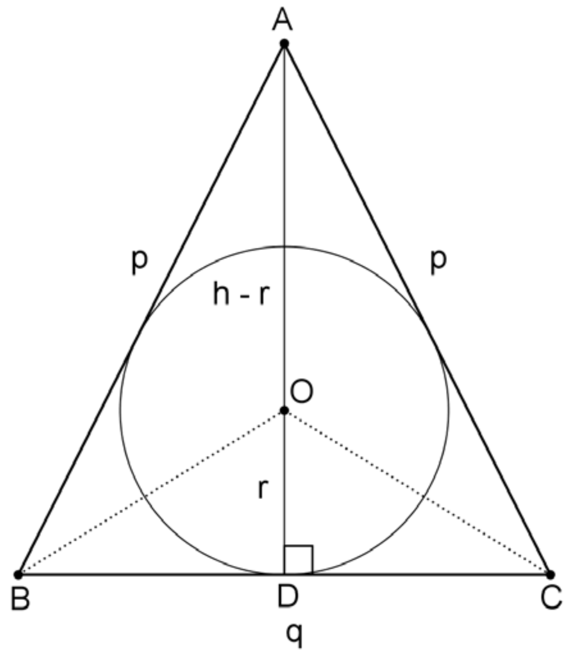
Arealet af ΔABC er

$$T = \tfrac{1}{2} h \cdot q \ .$$

Vi kan også bestemme arealet på en anden måde, nemlig som summen af arealerne af trekanterne *OBC*, *OAC* og *OAB*. Vi får

$$T = [OBC] + [OAC] + [OAB] = \tfrac{1}{2} r \cdot q + \tfrac{1}{2} r \cdot p + \tfrac{1}{2} r \cdot p = \tfrac{1}{2} r(2p+q) \quad ,$$

fordi de tre trekanter har lige lange højder af længde r og grundlinjer q, p og p.



Altså er

$$\tfrac{1}{2} h \cdot q = \tfrac{1}{2} r(2p+q) \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{hq}{2p+q} \quad . \qquad (1)$$

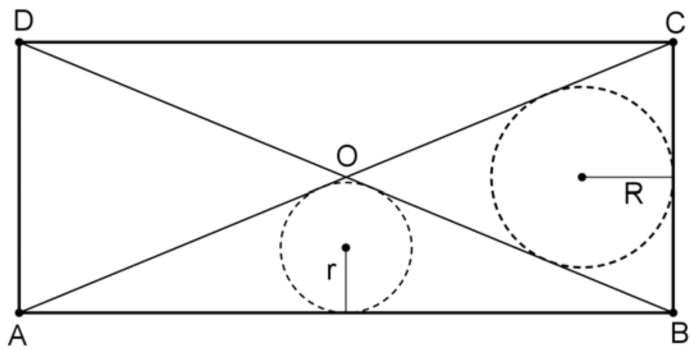
Nu er ΔABD retvinklet, så Pythagoras giver

$$h^2 + \left(\tfrac{1}{2} q\right)^2 = p^2 \quad \Leftrightarrow \quad h^2 + \tfrac{1}{4} q^2 = p^2 \quad \Leftrightarrow \quad h = \sqrt{p^2 - \tfrac{1}{4} q^2} \quad .$$

Dette indsættes i (1):

$$r = \frac{q\sqrt{p^2 - \frac{1}{4} q^2}}{2p+q} = \frac{q\sqrt{4p^2 - q^2}}{2(2p+q)} \quad . \qquad (2)$$

Dette er den ønskede formel, hvor radius r er udtrykt ved sidelængderne.



Vi kan i opgaven bruge sidelængderne 5 og 12 i rektanglet, dvs. $BC = 5$ og $AB = 12$. Så er diagonalernes længde:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 12^2 + 5^2 = 169 = 13^2 \quad \text{så} \quad AC = 13 \ .$$

Idet O er diagonalernes skæringspunkt får vi i ΔOBC ved brug af formlen (2), at

$$R = \frac{5\sqrt{4\cdot 6,5^2 - 5^2}}{2(13+5)} = \frac{5\sqrt{144}}{36} = \frac{60}{36} = \frac{5}{3} \ .$$

På samme måde får vi i ΔOAB, at

$$r = \frac{12\sqrt{4\cdot 6,5^2 - 12^2}}{2(13+12)} = \frac{12\sqrt{25}}{50} = \frac{60}{50} = \frac{6}{5} \ .$$

Forholdet mellem radierne R og r er altså

$$R : r = \frac{5}{3} : \frac{6}{5} = \frac{5}{3}\cdot\frac{5}{6} = \frac{25}{18} \ .$$

2. metode

Der gælder i almindelighed for en trekant, hvis indskrevne cirkel har radius r, arealet T og omkreds $2s$, at

$$T = r \cdot s \ .$$

Da diagonalen i rektanglet har længde 13, er omkredsen for trekanten til højre.

$$2s = 6\tfrac{1}{2} + 6\tfrac{1}{2} + 5 = 18 \quad \text{så} \quad s = 9$$

og dens areal er $\frac{1}{4}$ af hele rektanglets areal, altså $\frac{1}{4}\cdot 5\cdot 12 = 15$. Altså er

$$15 = R\cdot 9 \quad \Leftrightarrow \quad R = \frac{15}{9} = \frac{5}{3} \ .$$

På samme måde fås for trekanten med mindst cirkel, at $T = 15$ og omkredsen er

$$2s = 6\tfrac{1}{2} + 6\tfrac{1}{2} + 12 = 25 \quad \text{så} \quad s = 12\tfrac{1}{2}$$

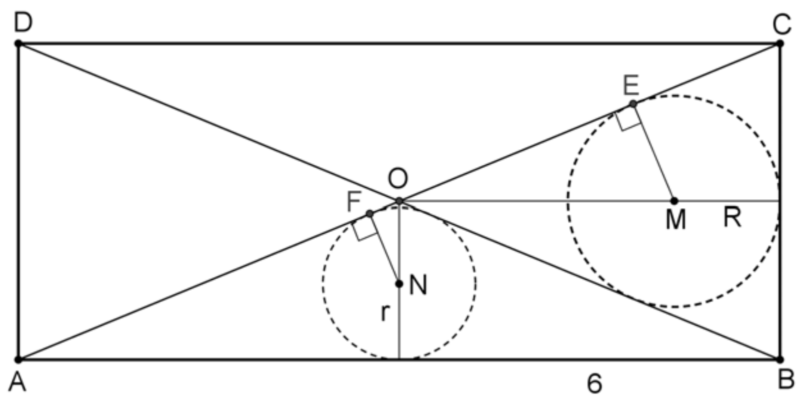
hvoraf

$$15 = r \cdot 12\tfrac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; 30 = r \cdot 25 \;\Leftrightarrow\; r = \frac{30}{25} = \frac{6}{5}\,.$$

Resten forløber som under 1. metode.

3. metode

Centrum O af rektanglet forbindes med centrerne M og N for trekanternes indskrevne cirkler. Desuden projiceres centrerne på rektanglets diagonaler i E og F.



Så er ΔMOE og ΔCAB ensvinklede. Vi har, at

$$MO = 6 - R\;,\quad ME = R\;,\quad CA = 13\;,\quad CB = 5\;.$$

Altså er

$$\frac{ME}{CB} = \frac{MO}{CA} \;\Leftrightarrow\; \frac{R}{5} = \frac{6-R}{13} \;\Leftrightarrow\; 13R = 30 - 5R \;\Leftrightarrow\; R = \frac{5}{3}\,.$$

På same made er ΔNOF ensvinklet med ΔACB, og

$$NO = 2\tfrac{1}{2} - r\;,\quad NF = r\;,\quad AB = 12\;,\quad AC = 13$$

og derfor er

$$\frac{NO}{AC} = \frac{NF}{AB} \;\Leftrightarrow\; \frac{2\frac{1}{2} - r}{13} = \frac{r}{12} \;\Leftrightarrow\; 30 - 12r = 13r \;\Leftrightarrow\; 25r = 30 \;\Leftrightarrow\; r = \frac{6}{5}\,.$$

Resten forløber som 1. metode.