Svar på opgave 2011-115 Maj 2011

Opgaven:

Find samtlige løsninger (x,y) til ligningssystemet

$$x^2 - 2y + 1 = 0$$
$$y^2 - 2x + 1 = 0$$

Aflæsning på regnemaskine er ikke tilstrækkeligt.

Løsning:

1. metode

Hvis vi trækker den nederste ligning fra den øverste, fås

$$x^2 - y^2 - 2y + 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - y)(x + y) + 2(x - y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - y)(x + y + 2) = 0 \ .$$

Nulreglen giver, at $x - y = 0$ eller $x + y + 2 = 0$. Hvis $x = y$, er ligningssystemet ensbetydende med

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - 1)^2 = 0$$

med den ene løsning $x = 1$. Derefter er $y = 1$ og dermed (x,y) = (1,1) den eneste mulige løsning. Ved indsættelse i ligningssystemet ser vi, at dette faktisk er en løsning.

Hvis $x \neq y$, er

$$x + y + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = -2 - x \ ,$$

og hvis vi indsætter dette i den første ligning, får vi

$$x^2 - 2(-2 - x) + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 2x + 5 = 0 \ ,$$

og da diskriminanten i denne ligning er negativ, får vi ingen løsninger.

2. metode

Ved addition af de to ligninger får vi

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - 1)^2 - 1 + (y - 1)^2 - 1 + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 0$$
.

Da kvadrater på tal er positive eller 0, er den eneste mulighed $(x,y) = (1,1)$, som faktisk er løsning.

3. metode
Vi isolerer y i den første ligning:

$$y = \frac{x^2+1}{2} \quad ,$$

og dette indsættes i den anden:

$$\left(\frac{x^2+1}{2}\right)^2 - 2x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{4}(x^4+2x^2+1) - 2x + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x^4 + 2x^2 - 8x + 5 = 0 \; .$$

Summen af koefficienterne 1, 2, -8 og 5 er 0, så $x = 1$ er en løsning. Vi foretager følgende omskrivning af venstre side af ligningen, idet vi gentagne gange frembringer størrelsen $x - 1$:

$$x^4 + 2x^2 - 8x + 5 = x^3(x-1) + x^3 + 2x^2 - 8x + 5 = x^3(x-1) + x^2(x-1) + 3x^2 - 8x - 5$$
$$= x^3(x-1) + x^2(x-1) + 3x(x-1) - 5x + 5 = x^3(x-1) + x^2(x-1) + 3x(x-1) - 5(x-1)$$
$$= (x-1)(x^3 + x^2 + 3x - 5) \; .$$

Polynomiet i den sidste parentes har også koefficienter med summen 0: 1, 1, 3 og -5. Vi gentager derfor metoden med at udkapsle $x - 1$:

$$x^3 + x^2 + 3x - 5 = x^2(x-1) + 2x^2 + 3x - 5 = x^2(x-1) + 2x(x-1) + 5x - 5$$
$$= x^2(x-1) + 2x(x-1) + 5(x-1) = (x-1)(x^2 + 2x + 5) \; .$$

Den ligning, vi skal løse, er altså

$$(x-1)(x-1)(x^2 + 2x + 5) = 0 \; .$$

Nulreglen giver, at mindst en af faktorerne er 0, så

$$x = 1 \quad \text{eller} \quad x^2 + 2x + 5 = 0 \; .$$

Den sidste ligning har negativ diskriminant, så den eneste løsning er $x = 1$. Dette giver ved indsættelse i den første ligning i ligningssystemet $y = 1$, og vi har igen den ene løsning $(x,y) = (1,1)$.

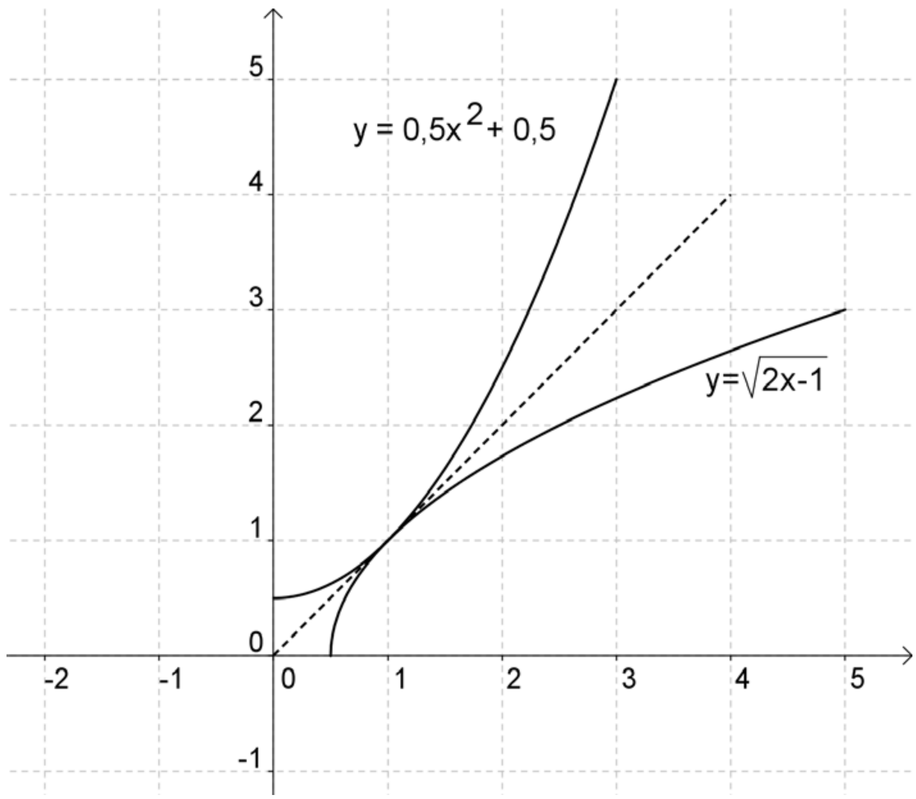
4. metode
De to ligninger omskrives idet vi isolerer y:

$$x^2 - 2y + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2} \quad , \quad y \geq \tfrac{1}{2}$$
$$y^2 - 2x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \sqrt{2x-1} \quad , \quad x \geq \tfrac{1}{2} \; .$$

De to ligninger i ligningssystemet fås af hinanden ved at ombytte x og y. Derfor fremstiller de grafer for to funktioner, der er hinandens omvendte. Vi kan altså skrive:

$$f(x) = \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2} \quad \text{og} \quad f^{-1}(x) = \sqrt{2x-1}$$

Grafer for funktioner, der er hinandens omvendte, er symmetriske med linjen med ligningen $y = x$ som symmetriakse (spejlingsakse), og grafernes eventuelle skæringspunkter ligger derfor på linjen $y = x$.



Da altså $x = y$, fås ligesom i 1. metode løsningen $(x,y) = (1,1)$. Da der kun er dette ene skæringspunkt mellem graferne, vil de endda tangere hinanden i punktet (1,1) med linjen $y = x$ som fælles tangent.

5. metode

Vi har modtaget en særdeles skarpsindig løsning fra Asbjørn Nordentoft, Aurehøj Gymnasium.

Den første ligning omskrives sådan:

$$x^2 - 2y + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2y = x^2 + 1 = (x-1)^2 + 2x\,.$$

Her er $(x - 1)^2$ positiv eller 0, så vi får vurderingen

$$2y \geq 2x\,.$$

Den anden ligning behandles på samme måde:

$$y^2 - 2x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = y^2 + 1 = (y-1)^2 + 2y \geq 2y\,.$$

Vi har nu, at

$$2y \geq 2x \geq 2y \quad ,$$

hvilket kun er opfyldt, hvis $x = y$. Ligesom i 1. metode fås nu løsningen $(x,y) = (1,1)$.