

Svar på opgave 2011-116

Juni 2011

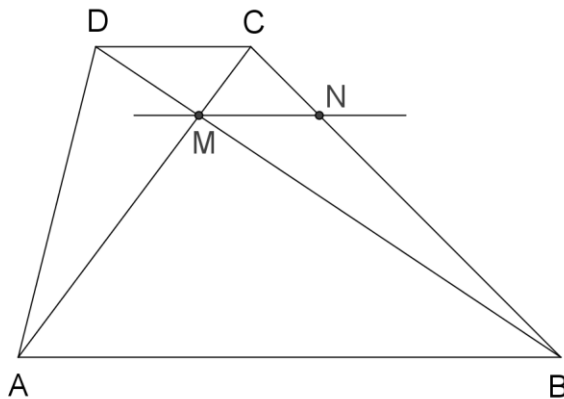
Opgaven:

I trapezet $ABCD$ er $AB \parallel CD$.

Diagonalerne skærer hinanden i M og en linje gennem M parallel med AB skærer BC i N .

Vis, at

$$\frac{1}{MN} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}.$$



Løsning:

Da $MN \parallel CD$ er $\triangle BMN$ og $\triangle BDC$ ensvinklede, så deres sider er proportionale:

$$\frac{MN}{DC} = \frac{BN}{BC}.$$

På samme måde er $\triangle CMN$ og $\triangle CAB$ ensvinklede, så

$$\frac{MN}{AB} = \frac{NC}{BC}.$$

Addition af disse to ligninger giver:

$$\frac{MN}{DC} + \frac{MN}{AB} = \frac{BN}{BC} + \frac{NC}{BC} \Leftrightarrow \frac{MN}{DC} + \frac{MN}{AB} = \frac{BN + NC}{BC}$$

$$\Leftrightarrow \frac{MN}{DC} + \frac{MN}{AB} = \frac{BC}{BC} = 1 .$$

Division med MN giver:

$$\frac{1}{CD} + \frac{1}{AB} = \frac{1}{MN} ,$$

hvilket er det ønskede.