Svar på opgave 2011-117 September 2011

Opgaven:

Find samtlige måder at skrive $\frac{29}{6}$ som sum af to positive uforkortelige brøker med nævnere 2 og 3.

Løsning:

Vi har, at

$$\frac{29}{6} = \frac{x}{2} + \frac{y}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{29}{6} = \frac{3x+2y}{6} \quad .$$

Altså søger vi positive hele løsninger x og y til ligningen

$$3x + 2y = 29 \ .$$

Her er 2y et lige tal, og da 29 er ulige, med $3x$ være ulige. Dette betyder, at x er ulige. Desuden er $3x < 29$, så $x < 10$.

Vi får derfor mulighederne neden for:

$$\begin{array}{lcll} x = 1 & : & 3 + 2y = 29 & \Leftrightarrow \quad y = 13 \\ x = 3 & : & 9 + 2y = 29 & \Leftrightarrow \quad y = 10 \\ x = 5 & : & 15 + 2y = 29 & \Leftrightarrow \quad y = 7 \\ x = 7 & : & 21 + 2y = 29 & \Leftrightarrow \quad y = 4 \\ x = 9 & : & 27 + 2y = 29 & \Leftrightarrow \quad y = 1 \ . \end{array}$$

Dermed har vi fremstillingerne

$$\frac{29}{6} = \frac{1}{2} + \frac{13}{3} = \frac{3}{2} + \frac{10}{3} = \frac{5}{2} + \frac{7}{3} = \frac{7}{2} + \frac{4}{3} = \frac{9}{2} + \frac{1}{3} \ .$$

Bemærkning. Ligningen

$$3x + 2y = 29$$

fremstiller i koordinatsystemet en ret linje, og da

$$3x + 2y = 29 \quad \Leftrightarrow \quad y = -\tfrac{3}{2}x + 14\tfrac{1}{2} \ ,$$

går linjen gennem punktet $(0{,}14\frac{1}{2})$ og har hældning $-\frac{3}{2}$. Dette betyder, at hvis man fra et punkt på linjen går 1 enhed mod højre og $1\frac{1}{2}$ enhed ned, kommer man igen til et punkt på linjen. Hvis vi benytter dette ud fra punktet $(0{,}14\frac{1}{2})$, kommer vi til punktet (1,13), som altså er et punkt på linjen med hele koordinater.

Hældningen på $-\frac{3}{2}$ kan også udtrykkes ved, at hvis man går 2 enheder mod højre og 3 enheder ned, kommer man igen til et punkt på linjen. Dette giver så netop de punkter, vi fandt oven for: (3,10), (5,7), (7,4) og (9,1). Se figuren.