Svar på opgave 2011-119 November 2011

Opgaven:

Find alle 6-cifrede tal x med følgende egenskab:

Hvis det første ciffer i x slettes og tilføjes efter de 5 andre cifre,
får man et tal, der er 3 gange så stort som x.

Fx bliver tallet $x = 158249$ forvandlet til 582491.
Tallet $x = 158249$ opfylder ikke betingelsen, fordi $3 \cdot 158249$ *ikke* er 582491.

Løsning:

Et 6-cifret tal z kan skrives som

$$z = (abcdef) \quad ,$$

hvor a er det første ciffer. De sidste 5 cifre i z danner tallet k, dvs.

$$k = (bcdef) \quad .$$

Så gælder, at

$$z = 10^5 \cdot a + k$$

Fx er

$$833917 = 800\,000 + 33917 = 8 \cdot 10^5 + 33917 \ .$$

Vi ser, at 8 er det første ciffer og 33917 indeholder de resterende 5 cifre.
Nu fjerner vi det første ciffer og sætter det bagerst. Vi får så tallet z_1, hvor

$$z_1 = (bcdefa) = a + 10 \cdot (bcdef) = a + 10k \quad .$$

I vores eksempel er jo

$$z_1 = 339178 = 8 + 339170 = 8 + 10 \cdot 33917 \quad .$$

Hvis vort krav til z skal opfyldes, er

$$z_1 = 3z \quad \Leftrightarrow \quad a + 10k = 3(10^5 \cdot a + k) \quad \Leftrightarrow \quad a + 10k = 300\,000a + 3k$$

$$\Leftrightarrow \quad 7k = 299\,999a \quad \Leftrightarrow \quad k = 42857a \quad .$$

Da k skal være 5-cifret, har vi kun mulighederne $a = 1$ og $a = 2$, som giver

$$a = 1 \ : \ k = 42857 \qquad \text{og} \qquad a = 2 \ : \ k = 85714 \quad .$$

Dermed er

$$z = 10^5 \cdot a + k = 100\,000a + 42857a = 142\,857a \,,$$

så vi får mulighederne

$$a = 1 \;:\; z = 142857 \cdot 1 = 142857$$

$$a = 2 \;:\; z = 142857 \cdot 2 = 285714 \,.$$

Vi må kontrollere, at disse værdier af z faktisk opfylder kravet:

$$z = 142857 \quad \text{giver} \quad 428571 = 3 \cdot 142857$$

$$z = 285714 \quad \text{giver} \quad 857142 = 3 \cdot 285714 \,.$$

Disse to værdier af z er altså de eneste to 6-cifrede tal, der opfylder det ønskede.

Bemærkning. Tallet 142857 er et såkaldt *Fønix-tal*. Ved multiplikation af tallet med 1, 3, 2, 6, 4 og 5 opstår tal, som fås ved cyklisk forskydning af cifrene, idet man får

$$1 \cdot 142857 = 142857 \qquad 2 \cdot 142857 = 285714 \qquad 4 \cdot 142857 = 571428$$

$$3 \cdot 142857 = 428571 \qquad 6 \cdot 142857 = 857142 \qquad 5 \cdot 142857 = 714285$$

.

Den sidste multiplikation er åbenbart et svar på følgende opgave: Find et 6-cifret tal med den egenskab, at når det sidste ciffer flyttes op som det første ciffer, så får man et tal, der er 5 gange så stort. Svaret er her 142857.

Iøvrigt er decimalbrøksudviklingen for $\frac{1}{7}$ den periodiske decimalbrøk 0,142857 142857... og de øvrige ægte brøker med 7 som nævner, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{6}{7}$ er også periodiske med sam- me cifre, blot forskudt. Fx er

$$\frac{2}{7} = 0{,}285714\;285714...$$

Vi nævner desuden det besynderlige faktum, at ciffergrupper på 3 adderes til til 999 og ciffergrupper på 2 adderes til multipla af 99:

$$142 + 857 = 999 \quad , \quad 285 + 714 = 999 \quad , \quad 428 + 571 = 999 \quad .$$

og

$$14 + 28 + 57 = 99 \quad \text{og} \quad 42 + 85 + 71 = 198 = 2 \cdot 99 \quad .$$