Svar på opgave 2011-120 December 2011

Opgaven:

Forlæng brøken $\frac{163}{101}$ med et tal, således at den resulterende brøk får en tæller og en nævner, hvis sum er et kvadrattal. Der ønskes det mindste sådanne tal.

Forlængning med fx 3 duer ikke, fordi

$$\frac{163}{101} = \frac{3 \cdot 163}{3 \cdot 101} = \frac{489}{303} \quad ,$$

men 489 + 303 = 792 er *ikke* et kvadrattal.

Løsning:

Den søgte brøk må være af formen

$$\frac{163k}{101k}$$

Vi ønsker, at summen af tæller og nævner skal være et kvadrattal, dvs. vi skal finde tallet k, så tallet

$$163k + 101k = 264k$$

er et kvadrattal. Nu er

$$264k = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot k$$

Vi supplerer rækken af primfaktorer med faktorerne 2, 3 og 11, for at opnå et *lige* antal af hver faktor. Vi sætter altså $k = 2 \cdot 3 \cdot 11 = 66$ og får så, at summen af tæller og nævner er

$$264k = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot k = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 11^2 = \left(2^2 \cdot 3 \cdot 11\right)^2$$

Vi har, at

$$\frac{163}{101} = \frac{163 \cdot 66}{101 \cdot 66} = \frac{10758}{6666}$$

og summen af tæller og nævner er et kvadrattal:

$$10758 + 6666 = 17424 = 132^2 \ .$$

Desuden er 66 det mindste tal, som brøken kan forlænges med, så tæller og nævner har en sum, der er et kvadrattal.