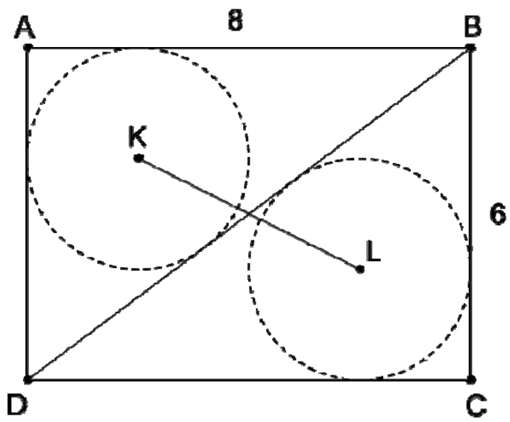
Svar på opgave 2012-121
Januar 2012

Opgaven:

Rektanglet *ABCD* har sidelængder *AB* = 8 og *BC* = 6.
De indskrevne cirkler i ΔABD og ΔBCD har centrer *K* og *L*.
Bestem længden af linjestykket *KL*.



Løsning:

Vi finder først radius *r* i de to cirkler. Lad *M* være røringspunkt for den indskrevne cirkel i ΔABD med hypootenusen *BD*. Desuden er *P* og *Q* røringspunkterne på *AD* og *AB*. Så er

$$AQ = AP = r$$

og derfor

$$DP = 6 - r \quad \text{og} \quad BQ = 8 - r \ .$$

Tangenter til en cirkel fra et punkt uden for cirklen er lige lange, så

$$DM = DP \quad \text{og} \quad BM = BQ \ .$$

Hypotenusen *BD* findes med Pythagoras:

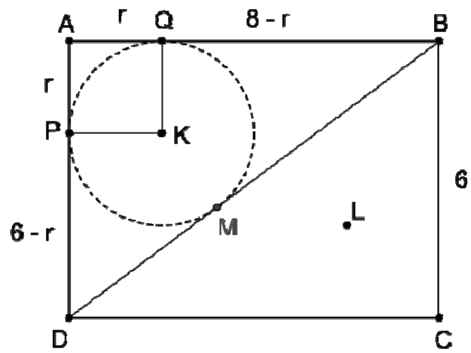
$$BD^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 \quad \Leftrightarrow \quad BD = 10 \ .$$

Så er

$$10 = BD = BM + DM = BQ + DP = 8 - r + 6 - r = 14 - 2r \ .$$

Altså får vi

$$10 = 14 - 2r \quad \Leftrightarrow \quad r = 2 \ .$$



Vi tegner en retvinklet trekant med KL som hypotenuse og ned kateter RL og RK parallelle med rektanglets sider. Vi ser, at

$$RL = 8 - 2 - 2 = 4 \quad \text{og} \quad RK = 6 - 2 - 2 = 2$$

og altså

$$KL^2 = RL^2 + RK^2 = 16 + 4 = 20 \ ,$$

hvoraf den søgte længde

$$KL = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} .$$

Generalisation. Hvis sidelængderne i rektanglet er a og b, får man formlen

$$KL^2 = a^2 + b^2 - 4r\sqrt{a^2 + b^2} \ .$$

Hvis $a = 8$ og $b = 6$, giver dette

$$KL^2 = 8^2 + 6^2 - 4 \cdot 2 \cdot \sqrt{100} = 64 + 36 - 80 = 20 .$$