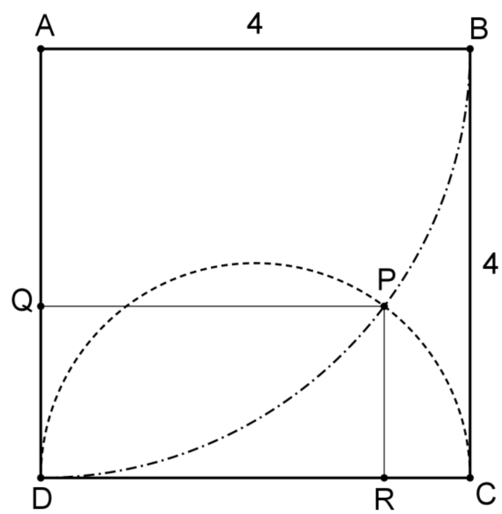
Svar på opgave 2012-123 Marts 2012

Opgaven:

□*ABCD* er et kvadrat med sidelængde 4.
En cirkelbue med centrum *A* og radius *AB* skærer halvcirklen med diameter *CD* i punktet *P*.

Bestem afstandene fra *P* til siderne *AD* og *CD*.



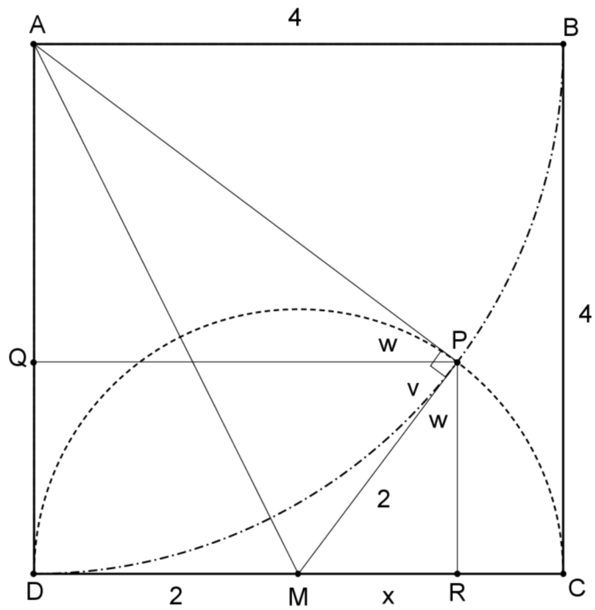
Løsning:

1. metode

Lad *M* være midtpunkt af *CD.* Vi trækker linjerne *AM* og *AP* og ser på
ΔADM og ΔAPM:

I ΔADM er $AD = 4$ og $DM = 2$.
I ΔAPM er $AP = 4$ (radius i kvartcirklen) og $MP = 2$ (radius i halvcirklen).

Trekanterne har *AM* som fælles side. De to trekanter har altså tre parvis lige lange sider, så de er *kongruente* (dvs. helt ens). Derfor er deres vinkler parvis lige store, så $\angle APM$ er ret.



Vi sætter $v = \angle QPM$. Så er

$$\angle APQ = 90° - v \quad \text{og} \quad \angle MPR = 90° - v \ ,$$

fordi både $\angle APM$ og $\angle QPR$ er rette. Vi kan bruge w som betegnelse:

$$w = \angle APQ = \angle MPR.$$

Nu er ΔMPR og ΔAPQ ensvinklede, så deres sider er proportionale:

$$\frac{QP}{PR} = \frac{AQ}{MR} = \frac{AP}{MP} = \frac{4}{2} = 2 \ . \qquad (1)$$

Sæt nu $MR = x$. Efter ligningen (1) har vi så:

$$\frac{AQ}{x} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad AQ = 2x \ ,$$

og dermed

$$PR = QD = AD - AQ = 4 - 2x \quad \text{og} \quad PQ = RD = x + 2 \ .$$

Efter (1) har vi så

$$2 = \frac{QP}{PR} = \frac{x+2}{4-2x} \ ,$$

hvoraf

$$x + 2 = 2(4 - 2x) \quad \Leftrightarrow \quad x + 2 = 8 - 4x \quad \Leftrightarrow \quad 5x = 6 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{6}{5}$$

og

$$PQ = x + 2 = \frac{6}{5} + 2 = \frac{16}{5} = 3{,}2 \quad \text{og} \quad PR = 4 - 2x = 4 - \frac{12}{5} = \frac{8}{5} = 1{,}6 \ .$$

Dermed er de ønskede linjestykker fundet.

2. metode

Forlængelsen af *RP* skærer *AB* i *S* og *M* er midtpunkt af *CD*. Vi sætter

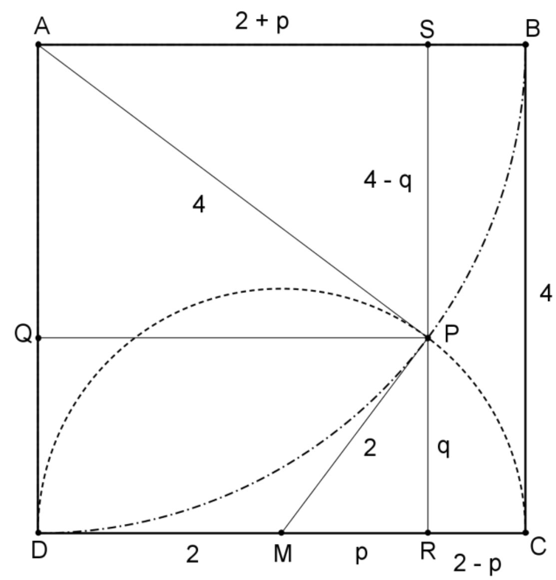
$$p = MR \quad \text{og} \quad q = PR \,.$$

Så er

$$PS = 4 - q \quad , \quad RC = SB = 2 - p \quad , \quad AS = AB - SB = 4 - (2 - p) = 2 + p \,.$$

Da $AP = 4$ er radius i kvartcirklen, kan vi bruge Pythagoras i ΔASP:

$$AS^2 + PS^2 = AP^2 \quad \Leftrightarrow \quad (2 + p)^2 + (4 - q)^2 = 16 \quad \Leftrightarrow \quad p^2 + q^2 + 4p - 8q + 4 = 0 \,. \qquad (2)$$



I ΔMPR er $MP = 2$ (radius i halvcirklen), så Pythagoras giver

$$p^2 + q^2 = 4 \,. \qquad (3)$$

Dette indsætter vi ligning (2):

$$4 + 4p - 8q + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4p - 8q + 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p = 2q - 2 \,.$$

Indsættelse i (3) giver:

$$(2q - 2)^2 + q^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 4q^2 + 4 - 8q + q^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \quad 5q^2 - 8q = 0 \quad \Leftrightarrow \quad q = 0 \;\vee\; q = \tfrac{8}{5} \,.$$

Da q er positiv, bruges kun $q = \frac{8}{5}$. Derefter er

$$p = 2q - 2 = \tfrac{16}{5} - 2 = \tfrac{6}{5} \,.$$

De ønskede afstande er

$$PR = q = \frac{8}{5} \quad \text{og} \quad PQ = AS = 2 + p = 2 + \frac{6}{5} = \frac{16}{5}\,.$$

3. metode

Hvis man har kendskab til analytisk geometri og bruger cirklens ligning i et passende valgt koordinatsystem, kan man finde koordinaterne til punktet *P*. Regningerne kommer til at ligne dem fra 2. metode temmelig meget, så vi gennemfører dem ikke her.