Svar på opgave 2012-124
April 2012

Opgaven:

Løs ligningssystemet

$$123x + 456y + 789z = a$$
$$456x + 789y + 123z = b$$
$$789x + 123y + 456z = c$$

med hensyn til *x*, *y* og *z*, dvs. udtryk *x*, *y* og *z* ved *a*, *b* og *c*. Husk at anføre samtlige mellemregninger.

Løsning:

Vi skal løse følgende ligningssystem

I. $123x + 456y + 789z = a$
II. $456x + 789y + 123z = b$
III. $789x + 123y + 456z = c$

med hensyn til *x*, *y* og *z*.
Addition af ligningerne giver

$$1368x + 1368y + 1368z = a + b + c \quad \Leftrightarrow \quad x+y+z = \tfrac{1}{1368}(a+b+c)\ .$$

Vi kan derefter trække ligning I fra ligning II:

$$\text{II} - \text{I}:\ 333x + 333y - 666z = b - a \quad \Leftrightarrow \quad x+y-2z = \tfrac{1}{333}(b-a)\ .$$

Vi har nu ligningerne

$$x+y+z = \tfrac{1}{1368}(a+b+c)$$
$$x+y-2z = \tfrac{1}{333}(b-a)\ .$$

Vi trækker den nederste ligning fra den øverste:

$$(x+y+z)-(x+y-2z) = \frac{a+b+c}{1368} - \frac{b-a}{333}\ ,$$

hvoraf

$$3z = \frac{a+b+c}{2^3\cdot 3^2\cdot 19} - \frac{b-a}{3^2\cdot 37} = \frac{37(a+b+c)-2^3\cdot 19(b-a)}{2^3\cdot 3^2\cdot 19\cdot 37} = \frac{189a-115b+37c}{50616}\ .$$

Altså er

$$z = \frac{189a - 115b + 37c}{151848} \ .$$

Derefter trækker vi i det oprindelige ligningssystem ligning II fra ligning III:

$$\text{III} - \text{II} \ : \ 333x - 666y + 333z = c - b \quad \Leftrightarrow \quad x - 2y + z = \tfrac{1}{333}(c - b) \ .$$

Nu har vi ligningerne

$$x + y + z = \tfrac{1}{1368}(a + b + c)$$
$$x - 2y + z = \tfrac{1}{333}(c - b) \ .$$

Subtraktion giver

$$3y = \frac{a+b+c}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 19} - \frac{c-b}{3^2 \cdot 37} = \frac{37(a+b+c) - 2^3 \cdot 19(c-b)}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 19 \cdot 37} = \frac{37a + 189b - 115c}{50616} \ ,$$

hvoraf

$$y = \frac{37a + 189b - 115c}{151848} \ .$$

Ved regninger af same type som disse, får vi til slut, at

$$x = \frac{-115a + 37b + 189c}{151848} \ .$$

Dermed er ligningssystemet løst.