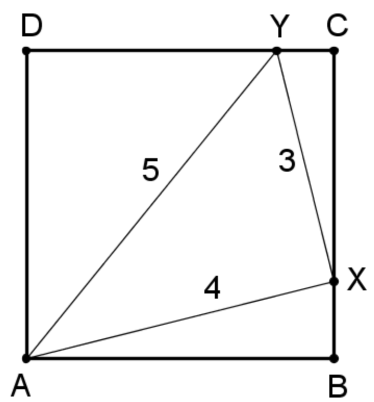
Svar på opgave 2012-127 September 2012

Opgaven:

Punkterne X og Y ligger på siderne BC og CD i kvadratet $ABCD$.
Det oplyses, at $XY = 3$, $AX = 4$ og $AY = 5$.
Beregn sidelængden i kvadratet.



Løsning:

I ΔAXB er

$$AX^2 + XY^2 = 4^2 + 3^2 = 25 = 5^2 = AY^2 \;,$$

og derfor er trekanten retvinklet i X.

Vi sætter

$$v = \angle XAB \;.$$

Så er

$$\angle BXA = 90° - v \;,$$

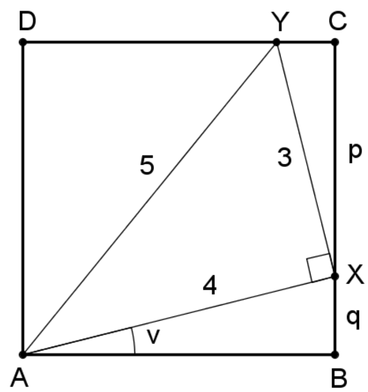
og dermed

$$180° = \angle BXC = \angle BXA + \angle AXY + \angle YXC$$

$$\Leftrightarrow \quad 180° = 90° - v + 90° + \angle YXC \quad \Leftrightarrow \quad \angle YXC = v \;.$$

Men så er ΔAXB og ΔXYC ensvinklede, så

$$\frac{AX}{XY}=\frac{BA}{CX}=\frac{XB}{YC} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4}{3}=\frac{BA}{CX}=\frac{XB}{YC} \ . \qquad (1)$$



For nemheds skyld sætter vi

$$p = CX \ , \ q = XB$$

så

$$BA = BC = XB + CX = p + q \ .$$

Af (1) får vi

$$\frac{4}{3}=\frac{p+q}{p}=\frac{q}{YC} \ .$$

Vi får kun brug for de første to brøker og ved at gange over kors får vi

$$4p=3\cdot(p+q) \quad \Leftrightarrow \quad 4p=3p+3q \quad \Leftrightarrow \quad p=3q \ .$$

Da ΔAXB er retvinklet, giver Pythagoras

$$AB^2+BX^2=AX^2 \quad \Leftrightarrow \quad (p+q)^2+q^2=4^2 \quad \Leftrightarrow \quad (3q+q)^2+q^2=16$$

$$\Leftrightarrow \quad (4q)^2+q^2=16 \quad \Leftrightarrow \quad 17q^2=16 \quad \Leftrightarrow \quad q=\frac{4}{\sqrt{17}} \ .$$

Sidelængden i kvadratet er så

$$p+q=3q+q=4q=\frac{16}{\sqrt{17}} \ .$$