Svar på opgave 2012-128 Oktober 2012

Opgaven:

Vis, at forskellen mellem to ulige kvadrattal er delelig med 8.

Fx er

$$9^2 - 5^2 = 81 - 25 = 56 = 7 \cdot 8$$

Og

$$13^2 - 7^2 = 169 - 49 = 120 = 15 \cdot 8$$

Løsning:

Hvis de to kvadrattal a^2 og b^2 er ulige, er også tallene a og b ulige. Ethvert ulige tal er det dobbelte af et tal plus 1, så vi kan skrive

$$a = 2p + 1 \quad \text{og} \quad b = 2q + 1 \ .$$

Så får vi

$$a^2 - b^2 = (2p + 1)^2 - (2q + 1)^2 = 4p^2 + 4p + 1 - 4q^2 - 4q - 1 = 4(p^2 - q^2 + p - q) \ .$$

Vi ser heraf, at forskellen $a^2 - b^2$ mellem kvadrattallene er delelig med 4.

Vi vil vise, at tallet i parentesen

$$p^2 - q^2 + p - q$$

er lige (dvs. deleligt med 2); så vil nemlig $a^2 - b^2$ være delelig med 8.

Vi får, at

$$p^2 - q^2 + p - q = p(p + 1) - q(q + 1) \ .$$

Her er p og $p + 1$ to tal i talrækken, der følger lige efter hinanden, så et af dem er lige. Derfor er $p(p + 1)$ lige. På samme måde er $q(q + 1)$ lige. Dermed er også differensen $p(p + 1) - q(q + 1)$ lige. Dette var hvad vi ønskede at nå frem til.

Alternativt kunne man skrive, at

$$p^2 - q^2 + p - q = (p + q)(p - q) + (p - q) = (p - q)(p + q + 1) \ .$$

Summen af de to faktorer i dette produkt er

$$(p - q) + (p + q + 1) = 2p + 1 ,$$

og dette er et ulige tal. Hvis x og y er to tal, kan vi se at

hvis x og y begge er lige, er $x + y$ lige
hvis x og y begge er ulige, er $x + y$ lige
hvis x er lige og y ulige eller omvendt, er $x + y$ ulige.

Hvis summen af to tal er ulige må et af tallene derfor være lige. Altså er en af faktorerne $p - q$ og $p + q + 1$ lige, hvilket er det ønskede.