Svar på opgave 2013-131 Januar 2013

Opgaven:

Siderne i en bog er fortløbende nummereret med tallene 1, 2, . . .
Et blad er revet ud af bogen.
Summen af alle de resterende sidenumre i bogen er 81707.
Find sidenumrene på det blad, der er revet ud samt antallet af sider i bogen.

Løsning:

Vi får brug for summen af de n første naturlige tal. Den er givet ved formlen

$$1+2+3+\cdots+n=\tfrac{1}{2}n(n+1) \ .$$

Bogen har n sider, så *inden* et blad bliver revet ud er summen af sidenumrene

$$\tfrac{1}{2}n(n+1) \ .$$

Efter at et blad er revet ud er summen af sidenumrene 81707, så

$$\tfrac{1}{2}n(n+1) > 81707 \ .$$

Vi kan på grafregneren opstille en tabel over værdierne for funktionen $f(n)=\tfrac{1}{2}n(n+1)$ og finder (antallet n af sider er lige):

$$\begin{aligned} n=402 \quad &: \quad \tfrac{1}{2}n(n+1) = \tfrac{1}{2}\cdot 402\cdot 403 = 81003 \\ n=404 \quad &: \quad \tfrac{1}{2}n(n+1) = \tfrac{1}{2}\cdot 404\cdot 405 = 81810 \ . \end{aligned}$$

Den mindste værdi af n, der opfylder uligheden er altså 404.

Hvis bogen indeholder 404 sider, er summen af sidenumrene altså 81810, og da summen af sidenumrene efter at et blad er revet ud, er 81707, må forskellen 81810 - 81707 = 103 være summen af sidenumrene på den fjernede blad. På dette blad står derfor sidenumrene 51 og 52.

Nu kunne bogen måske indeholde *mere* end 404 sider. Lad os forudsætte, at den indeholder 406 sider eller derover. Hvis man river det sidste blad ud, er summen af de resterende sidenumre mindst $1+2+3+\cdots+404=81810$, og altså *ikke* 81707. Derfor kan bogen ikke indeholde mere end 404 sider.