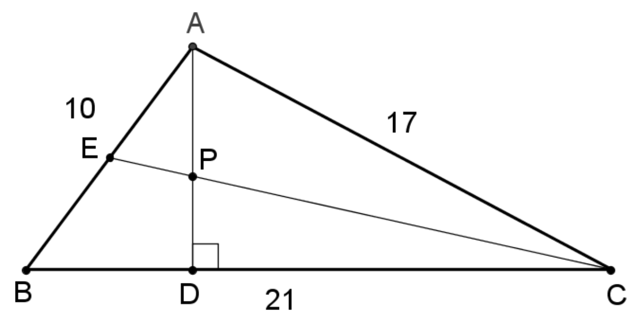
Svar på opgave 2013-132
Februar 2013

Opgaven:

I ΔABC er $AB = 10$, $AC = 17$ og $BC = 21$.
Højden AD og medianen CE skærer hinanden i P.
Bestem arealet af ΔPDC.



Løsning:

Vi sætter $x = BD$ så $DC = 21 – x$.
I ΔABD giver Pythagoras, at

$$AD^2 = 10^2 - x^2 = 100 - x^2$$

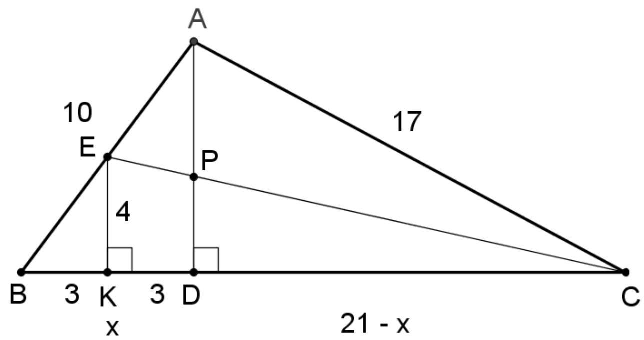
og i ΔADC får vi

$$AD^2 = 17^2 - (21 - x)^2$$

Dermed er

$$17^2 - (21 - x)^2 = 100 - x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 289 - 441 - x^2 + 42x = 100 - x^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 42x = 100 - 289 + 441 = 252 \quad \Leftrightarrow \quad x = 6\ .$$



Vi finder højden AD til

$$AD^2 = 100 - x^2 = 100 - 6^2 = 64 \quad \text{så} \quad AD = 8$$

og

$$CD = 21 - x = 15$$

Projektionen af E på BC er K.
Da E er midtpunkt af AB og $EK \parallel AD$, er K midtpunkt af BD, så

$$BK = KD = 3$$

Desuden er

$$EK = \tfrac{1}{2} AD = 4.$$

Nu er ΔCPD og ΔCEK ensvinklede, så

$$\frac{PD}{EK} = \frac{CD}{CK} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{PD}{4} = \frac{15}{18} \quad \Leftrightarrow \quad PD = \frac{4 \cdot 15}{18} = \frac{10}{3}\ .$$

Dermed er arealet af ΔCPD:

$$\tfrac{1}{2} \cdot PD \cdot CD = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{10}{3} \cdot 15 = 25\ .$$