Svar på opgave 2013-133 Marts 2013

Opgaven:

Tallene *n* og *n* + 1 er naturlige tal, der følger lige efter hinanden i talrækken.
Det viser sig, at forskellen mellem deres reciprokke tal

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

som decimalbrøk kan skrives 0,0*aaaa*… , hvor *a* er et af cifrene 1, 2, 3,…, 9.

Hvilke tal *n* og *a* kan der være tale om?

Løsning:

Vi sætter

$$x = 0\,,\,0\;a\;a\;a\;a\;\dots$$

hvor vi for tydelighedens skyld har spærret decimalerne en smule.

Så er

$$100x = a\,,\,a\;a\;a\;a\;\dots$$
$$10x = 0\,,\,a\;a\;a\;a\;\dots.$$

Vi trækker den nederste ligning fra den øverste og får

$$90x = a\,,\,0\;0\;0\;0\;\dots \quad \text{eller} \quad 90x = a$$

hvoraf

$$x = 0{,}0aaaa\dots. = \frac{a}{90}\;.$$

Vi søger et naturligt tal *n* og et ciffer *a*, så

$$\frac{a}{90}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} \quad \text{eller} \quad \frac{a}{90}=\frac{1}{n(n+1)}\;.$$

Vi kan skrive denne ligning sådan:

$$\frac{90}{a}=n(n+1)\;.$$

Så må cifferet *a* gå op i 90, dvs. vi har mulighederne

$$a\text{:}\;\; 1\,,\,2\,,\,3\,,\,5\,,\,9.$$

Dette giver værdierne

$$\frac{90}{a} \ : \ 90 \ , \ 45 \ , \ 30 \ , \ 18 \ , \ 10 \ .$$

Blandt disse tal søger vi dem, der er produkt af to nabotal i den naturlige talrække. De eneste muligheder er

$$90 = 9 \cdot 10 \quad \text{og} \quad 30 = 5 \cdot 6 \ .$$

Disse giver $n = 9$ og $n = 5$ svarende til $a = 1$ og $a = 3$, så vi får

$$\frac{1}{9} - \frac{1}{10} = \frac{1}{90} = 0,01111.... \qquad \text{og} \qquad \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30} = 0,03333.....$$