# Svar på opgave 2013-134
# April 2013

## *Opgaven:*

Tallet $k$ er givet ved

$$k = \frac{1+2+3+\cdots+100+x}{1+2+3+\cdots+99+x}\ .$$

Her er $x$ et helt tal.

Bestem $x$, så $k$ er et naturligt tal og desuden skal $k$ være mindst mulig.

## *Løsning:*

Vi har, at

$$k = \frac{1+2+3+\cdots+99+100+x}{1+2+3+\cdots+99+x} = \frac{1+2+3+\cdots+99+x+100}{1+2+3+\cdots+99+x} = 1+\frac{100}{1+2+3+\cdots+99+x}\ .$$

Nu finder vi summen af de 99 første tal i talrækken. Vi kan skrive, at

$$\begin{aligned} s &= 1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 \\ s &= 99 + 98 + 97 + \cdots + 2 + 1\ . \end{aligned}$$

Ved addition af disse ligninger fås

$$2s = (1 + 99) + (2 + 98) + (3 + 97) + \cdots + (98 + 2) + (99 + 1)$$

og da der optræder 99 parenteser, er

$$2s = 99 \cdot 100 \quad \Leftrightarrow \quad s = 99 \cdot 50 = 4950\ .$$

Dermed er

$$k = 1 + \frac{100}{4950+x}\ .$$

Hvis $k$ skal være et naturligt tal og desuden mindst muligt, må brøkens værdi være 1. Så får vi den mindst mulige værdi for $k$, nemlig $k = 2$. Dette betyder, at nævneren må være 100:

$$4950 + x = 100 \quad \Leftrightarrow \quad x = -4850$$