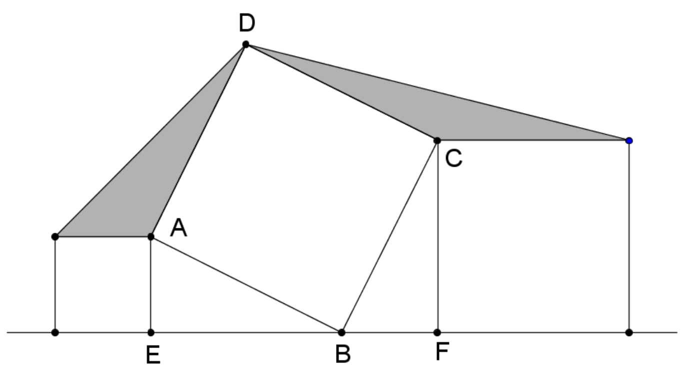
Svar på opgave 2013-135 Maj 2013

NB: Fra ultimo maj måned vil *Månedens Opgave* være placeret på websitet uvmat.dk

Opgaven:

Kvadratet *ABCD* er givet. Gennem *B* trækkes en linje uden for kvadratet. Punkterne *A* og *C* projiceres på linjen i *E* og *F* og der tegnes kvadrater med siderne *CF* og *AE*.

Vis, at de to farvede trekanter har samme areal.



Løsning:

1. metode

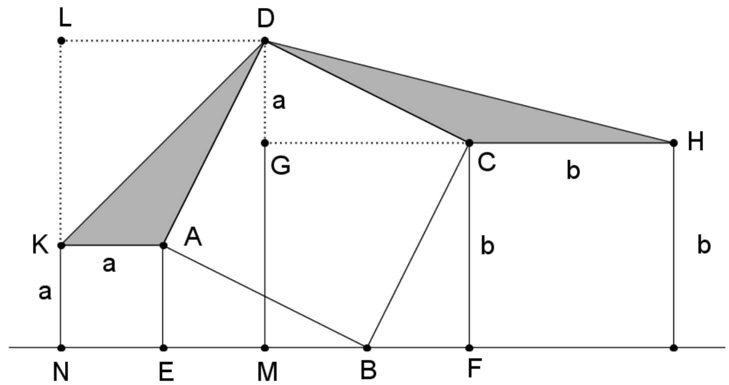
Lad a og b være sidelængderne i de to ydre kvadrater. Den øverste side i kvadratet til højre forlænges mod venstre og der trækkes en lodret linje gennem D. Skæringspunktet betegnes med G.

Nu er ΔDGC og ΔAEB kongruente (dvs. helt ens). De har nemlig parallelle sider, så de er ensvinklede og da de har lige lange hypotenuser AB og CD, er de også lige store.

Men så er $DG = AE = a$, så arealet af ΔDCH er

$$[DCH] = \tfrac{1}{2} \cdot CH \cdot DG = \tfrac{1}{2} \cdot b \cdot a \ ,$$

idet $CH = b$ er grundlinje og $DG = a$ er højde i trekanten.



En vandret linje gennem D og en lodret linje gennem K skærer hinanden i L og projektionen af D på EF er M. Så er

$$DM = DG + GM = a + CF = a + b$$

så vi får

$$LK = LN - KN = DM - KN = a + b - a = b$$

Arealet af ΔDKA er

$$[DKA] = \tfrac{1}{2} \cdot KA \cdot LK = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot b$$

fordi $KA = a$ er grundlinje og $LK = b$ er højde i trekanten.

Dermed er vist, at de to trekanter har samme areal.

2. metode

Vi betegner $\angle BCF$ med v. Så er

$$\angle CBF = 90° - v \ ,$$

og da $\angle ABC = 90°$, er $\angle ABE = v$. Dermed er de to trekanter CBF og BAE ensvinklede og da de har lige lange hypotenuser er de kongruente (helt ens). Altså er

$$EB = CF = b \quad \text{og} \quad BF = AE = a \ .$$

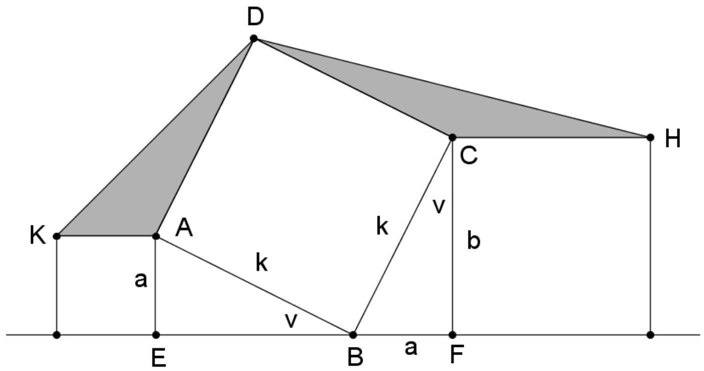
Vi betegner sidelængden i det midterste kvadrat med k. Vi finder vinklerne i de to trekanter DCH og DAK:

$$\angle DCH = 360° - v - 90° - 90° = 180° - v$$

og

$$\angle DAK = 360° - 90° - 90° - (90° - v) = 90° + v \ .$$

Endelig får vi i ΔBCF, at



$$\sin v = \frac{a}{k} \quad \text{og} \quad \cos v = \frac{b}{k} \ .$$

Nu finder vi arealet af ΔDCH:

$$[DCH] = \frac{1}{2} \cdot b \cdot k \cdot \sin \angle DCH = \frac{1}{2} bk \cdot \sin(180° - v) = \frac{1}{2} bk \cdot \sin v = \frac{1}{2} bk \cdot \frac{a}{k} = \frac{1}{2} ab \ .$$

Vi har her brugt, at

$$\sin(180° - v) = \sin v \ .$$

På samme måde finder vi arealet af ΔDAK:

$$[DAK] = \frac{1}{2} \cdot a \cdot k \cdot \sin \angle DAK = \frac{1}{2} ak \cdot \sin(90° + v) = \frac{1}{2} ak \cdot \cos v = \frac{1}{2} ak \cdot \frac{b}{k} = \frac{1}{2} ab \ .$$

Vi har her brugt, at $\sin(90°+v) = \cos v$.