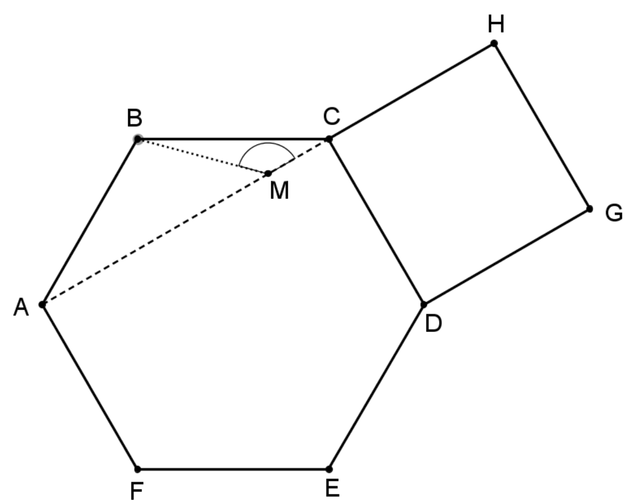
Svar på opgave 2013-137 September 2013

NB: Fra ultimo maj 2013 er *Månedens Opgave* placeret på websitet uvmat.dk

Opgaven:

På figuren er $ABCDEF$ en regulær sekskant og $CDGH$ er et kvadrat. Diagonalen AC i sekskanten tegnes.
Vis, at A, C og H ligger på linje.

Punktet M er midtpunkt af linjestykket AH. M forbindes med B.
Bestem $\angle BMC$.



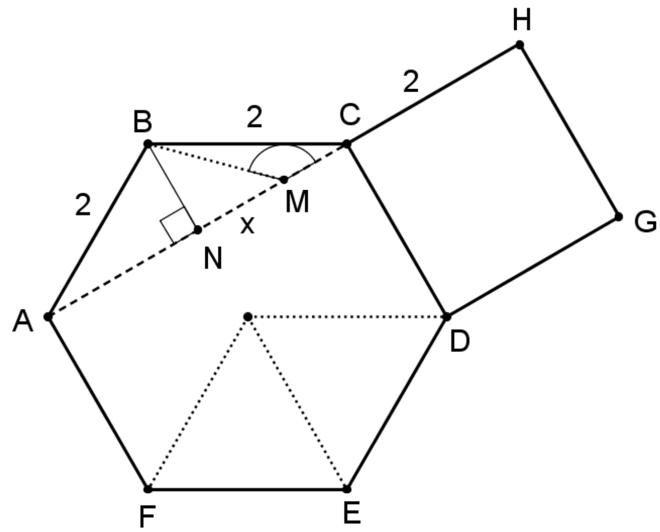
Løsning:

I. Vi viser først, at A, C og H ligger på linje. Vi trækker linjestykkerne CA og CH. Den regulære sekskant er sammensat af seks ligesidede trekanter, så hver vinkel i sekskanten er 120°. I ΔABC er altså B = 120°, og da trekanten er ligebenet, er

$$\angle BCA = \angle BAC = 30°.$$

Derfor er $\angle ACD = \angle BCD - \angle BCA = 120° - 30° = 90°$.

Da også $\angle DCH = 90°$, ligger linjestykkerne *CH* og *CA* i forlængelse af hinanden, så *A*, *C* og *H* ligger på linje.



II. Vi kan antage, at længden af siderne i sekskanten og kvadratet er 2. Punktet *M* er midtpunkt af *AH* og *N* er projektionen af *B* på *AH*. Da ΔABN er retvinklet, er

$$\cos 30° = \frac{AN}{AB} \quad \Leftrightarrow \quad AN = AB \cdot \cos 30° = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\ .$$

Vi sætter $NM = x$, og da *N* er midtpunkt af *AC* (*N* er fodpunkt af højden i den ligebenede ΔABC), er

$$AN = NC \quad \Leftrightarrow \quad AN = NM + MC \quad \Leftrightarrow \quad MC = AN - NM = \sqrt{3} - x.$$

Nu er *M* midtpunkt af *AH*, så

$$AM = MH \quad \Leftrightarrow \quad AN + NM = MC + CH \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{3} + x = \sqrt{3} - x + 2$$

$$\Leftrightarrow \quad x = -x + 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1\ .$$

I ΔBNA giver Pythagoras, at

$$BN^2 = AB^2 - AN^2 = 2^2 - \sqrt{3}^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad BN = 1\ .$$

I ΔBNM har vi så, at $BN = 1$ og $NM = x = 1$, så ΔBNM er retvinklet med lige lange kateter. Altså er $\angle BMN = 45°$ og dermed fås den søgte vinkel til

$$\angle BMC = 180° - 45° = 135°.$$