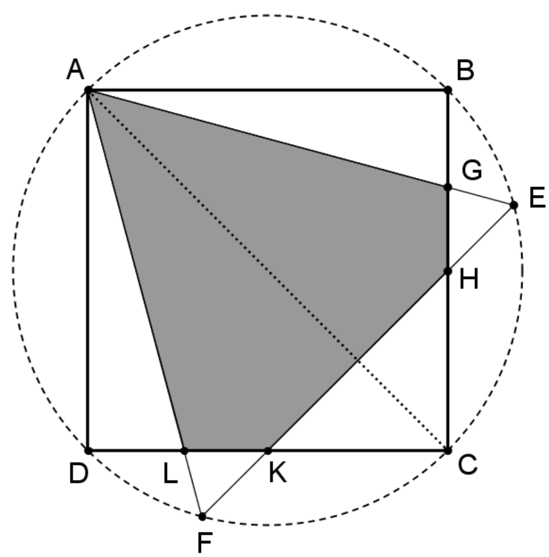
Svar på opgave 2014-141
Januar 2014

Opgaven:

Et kvadrat *ABCD* og en ligesidet trekant *AEF* er indskrevet i en cirkel med radius 1.
Diagonalen *AC* i kvadratet er vinkelret på siden *EF* i trekanten.
Trekantens sider og kvadratets sider skærer hinanden i *G*, *H*, *K* og *L*.
Bestem arealet af femkanten *AGHKL*.



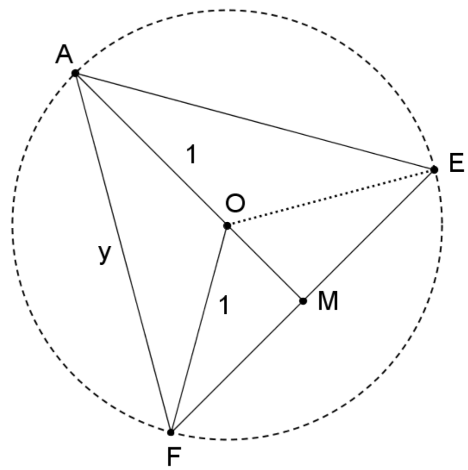
Løsning:

Lad *y* være længden af siden i den ligesidede trekant, der er indskrevet i cirklen med radius 1 og *O* cirklens centrum. I ΔAOF giver cosinusrelationen:

$$y^2 = 1^2 + 1^2 - 2\cdot 1\cdot 1\cdot \cos 120° \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = 2 - 2\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad y = \sqrt{3}\ .$$

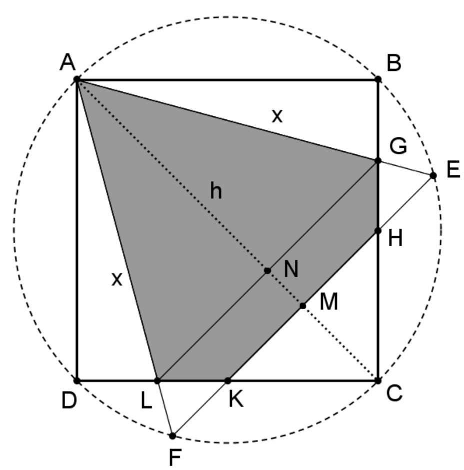
Højden *AM* i den ligesidede ΔAFE fås ved Pythagoras

$$AM^2 + MF^2 = AF^2 \quad \Leftrightarrow \quad AM^2 + \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 = \sqrt{3}^2$$
$$\Leftrightarrow \quad AM^2 + \tfrac{3}{4} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad AM^2 = \tfrac{9}{4} \quad \Leftrightarrow \quad AM = \tfrac{3}{2} \; .$$



Lad projektionen af G på AC være N og lad skæringspunktet mellem AC og EF være M. Da $\angle GNC$ er ret og $\angle NCG = 45°$, er ΔGNC ligebenet med $NG = NC$. Da cirklens diameter er $AC = 2$, er

$$NG = NC = AC - AN = 2 - AN \; . \qquad (1)$$



Da figuren er symmetrisk om linjen AC, er projektionen af L på AC netop N. I den ligesidede ΔALG er $h = AN$ højde. Vi betegner med x siden i trekanten, dvs. $x = AL = AG$ og $LN = NG = \frac{1}{2}x$. Pythagoras giver så

$$AN^2 + NG^2 = AG^2 \quad \Leftrightarrow \quad h^2 + \left(\tfrac{1}{2}x\right)^2 = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad h^2 = \tfrac{3}{4}x^2$$

$$\Leftrightarrow \quad h=\tfrac{\sqrt{3}}{2}x \quad \Leftrightarrow \quad AN=h=\sqrt{3}\cdot\tfrac{1}{2}x=\sqrt{3}\cdot NG\ .$$

Altså får vi efter (1):

$$NG=2-AN \quad \Leftrightarrow \quad NG=2-\sqrt{3}\cdot NG \quad \Leftrightarrow \quad NG+\sqrt{3}\cdot NG=2$$

$$\Leftrightarrow \quad NG=\frac{2}{\sqrt{3}+1}=\frac{2\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}=\frac{2\left(\sqrt{3}-1\right)}{3-1}=\sqrt{3}-1\ .$$

Derefter finder vi arealet af ΔACG:

$$[ACG]=\tfrac{1}{2}\cdot AC\cdot NG=\tfrac{1}{2}\cdot 2\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)=\sqrt{3}-1\ .$$

Nu er ΔMHC retvinklet og ligebenet, så

$$HM=MC=AC-AM=2-AM=2-\tfrac{3}{2}=\tfrac{1}{2}\ .$$

Dermed er arealet af ΔMHC:

$$[MHC]=\tfrac{1}{2}\cdot HM\cdot MC=\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{8}\ .$$

Endelig fås

$$[AMHG]=[ACG]-[MHC]=\sqrt{3}-1-\tfrac{1}{8}\ ,$$

og det søgte areal er dermed

$$[AGHKL]=2\cdot[AMHG]=2\sqrt{3}-\tfrac{9}{4}\ .$$