

Svar på opgave 2014-142

Februar 2014

Opgaven:

Reducér udtrykket

$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$$

Samtlige mellemregninger skal medtages.

Løsning:

Vi omskriver som nedenstående. Til højre er angivet forklaringer på hver omskrivning.

$$\begin{aligned} K &= \frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)} \\ &= \frac{-a^3}{(a-b)(c-a)} + \frac{-b^3}{(b-c)(a-b)} + \frac{-c^3}{(c-a)(b-c)} && \text{Skaf samme faktorer i nævneren} \\ &= \frac{-a^3(b-c) - b^3(c-a) - c^3(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)} && \text{Sæt på fælles brøkstreg} \\ &= \frac{a^3(c-b) + b^3(a-c) + c^3(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} && \text{Skift fortegn for led} \\ &= \frac{a^3(c-b) + ab^3 - ac^3 + bc^3 - cb^3}{(a-b)(b-c)(c-a)} && \text{Gang parenteser ud} \\ &= \frac{a^3(c-b) + a(b^3 - c^3) + bc^3 - cb^3}{(a-b)(b-c)(c-a)} && \text{Sæt } a \text{ uden for parentes} \end{aligned}$$

Nu benytter vi, at der gælder:

$$p^3 - q^3 = (p - q)(p^2 + pq + q^2)$$

så vi kan fortsætte omskrivningerne sådan:

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{a^3(c-b) + a(b-c)(b^2 + bc + c^2) + bc(c^2 - b^2)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\
 &= \frac{a^3(c-b) - a(c-b)(b^2 + bc + c^2) + bc(c-b)(c+b)}{(a-b)(b-c)(c-a)} && \text{Skift fortegn og omskriv sidste led} \\
 &= \frac{(c-b)(a^3 - a(b^2 + bc + c^2) + bc(c+b))}{(a-b)(b-c)(c-a)} && \text{Sæt } c - b \text{ uden for parentes} \\
 &= \frac{-a^3 + a(b^2 + bc + c^2) - bc(b+c)}{(a-b)(c-a)} && \text{Forkort brøken med } c - b \\
 &= \frac{-a^3 + ab^2 + abc + ac^2 - cb^2 - bc^2}{(a-b)(c-a)} && \text{Gang parenteser ud} \\
 &= \frac{(ab^2 - cb^2) - (bc^2 - abc) - (a^3 - ac^2)}{(a-b)(c-a)} && \text{Gruppér udvalgte led} \\
 &= \frac{b^2(a-c) - bc(c-a) - a(a^2 - c^2)}{(a-b)(c-a)} && \text{Sæt faktorer uden for parentes} \\
 &= \frac{-b^2(c-a) - bc(c-a) - a(a-c)(a+c)}{(a-b)(c-a)} && \text{Omskriv første og sidste led} \\
 &= \frac{-b^2(c-a) - bc(c-a) + a(c-a)(a+c)}{(a-b)(c-a)} && \text{Skift fortegn i sidste led} \\
 &= \frac{-b^2 - bc + a(a+c)}{a-b} && \text{Forkort med } c - a \\
 &= \frac{-b^2 - bc + a^2 + ac}{a-b} && \text{Gang parenteser ud} \\
 &= \frac{a^2 - b^2 + ac - bc}{a-b} && \text{Skift rækkefølge af led} \\
 &= \frac{(a-b)(a+b) + c(a-b)}{a-b} && \text{Omskriv tælleren} \\
 &= a + b + c . && \text{Forkort med } a - b
 \end{aligned}$$