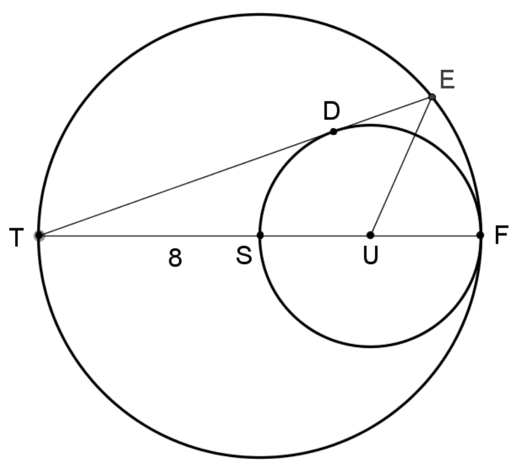
Svar på opgave 2014-143
Marts 2014

Opgaven:

En cirkel med radius 8 har centrum i S. En diameter gennem S skærer cirklen i T og F.
En mindre cirkel med centrum U tangerer den store cirkel i F og går gennem S.
Tangenten til den lille cirkel fra T tangerer i D og skærer den store cirkel i E.
Bestem sidelængderne i ΔTUE.



Løsning:

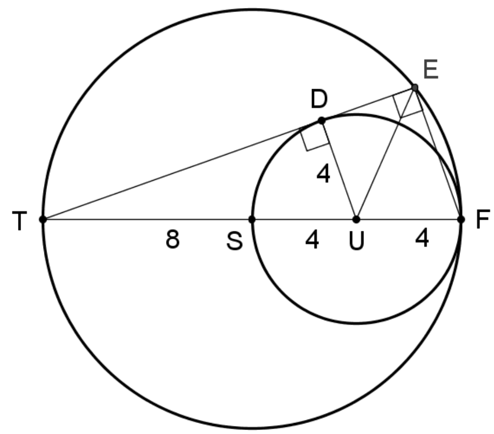
Det er klart, at $TU = 12$. Da TD er tangent til den lille cirkel, er $\angle TDU = 90°$. Vi tegner linjen EF. Så er $\angle TEF$ ret, fordi det er en periferivinkel, der spænder over en diameter i den store cirkel.

Nu er ΔTEF og ΔTDU ensvinklede med sideforholdet

$$\frac{TF}{TU} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3} \ .$$

Derfor er

$$EF = \tfrac{4}{3}\ DU = \tfrac{4}{3}\cdot 4 = \tfrac{16}{3}\ .$$



I ΔTEF fås ved Pythagoras

$$TE^2 + EF^2 = TF^2 \quad \Leftrightarrow \quad TE^2 + \left(\tfrac{16}{3}\right)^2 = 16^2 \quad \Leftrightarrow \quad TE^2 = 256 - \tfrac{256}{9}$$

$$\Leftrightarrow \quad TE^2 = \tfrac{2048}{9} \quad \Leftrightarrow \quad TE = \sqrt{\tfrac{2048}{9}} = \tfrac{32\sqrt{2}}{3}\ .$$

I ΔTDU er

$$TD^2 + DU^2 = TU^2 \quad \Leftrightarrow \quad TD^2 + 16 = 144 \quad \Leftrightarrow \quad TD = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}\ .$$

Videre er

$$DE = TE - TD = \tfrac{32\sqrt{2}}{3} - 8\sqrt{2} = \tfrac{32\sqrt{2}}{3} - \tfrac{24\sqrt{2}}{3} = \tfrac{8\sqrt{2}}{3}\ .$$

I ΔDUE giver Pythagoras

$$EU^2 = DE^2 + DU^2 = \left(\tfrac{8\sqrt{2}}{3}\right)^2 + 16 = \tfrac{128}{9} + 16 = \tfrac{128+144}{9} = \tfrac{272}{9}\ .$$

så

$$EU = \sqrt{\frac{272}{9}} = \frac{\sqrt{272}}{3} = \frac{4\sqrt{17}}{3}\ .$$

Dermed er alle sider i ΔTUE fundet.