Svar på opgave 2014-146
Juni 2014

Opgaven:

I denne opgave er alle tal hele og positive. Husk desuden på, at en række tal kaldes *konsekutive*, hvis de følger lige efter hinanden i talrækken.
Peter udregner summen af 7 konsekutive tal. Derefter udregner han summen af 8 (andre) konsekutive tal og til sidst udregner han summen af 9 (andre) konsekutive tal.

Til sin overraskelse opdager han, at han i de tre tilfælde får samme sum - og det viser sig desuden, at hans resultat er det mindste tal, der kan opnås på denne måde.

Hvilke tal indgår i de tre summer?

Løsning:

1. metode

Hvis n er et helt positivt tal, bruger vi betegnelserne

$S(n)$: Summen af de 7 konsekutive tal, der begynder med n
$O(n)$: Summen af de 8 konsekutive tal, der begynder med n
$N(n)$: Summen af de 9 konsekutive tal, der begynder med n

Fx er

$$S(5) = 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 = 56$$

$$O(3) = 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 52$$

$$N(11) = 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 = 135$$

Vi kan let med lidt flid opstille en tabel over værdierne for $S(n)$, $O(n)$ og $N(n)$:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$S(n)$	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	112	119	126	133	140
$O(n)$	36	44	52	60	68	76	84	92	100	108	116	124	132	140	148	156	164
$N(n)$	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	144	153	162	171	180	189

n	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
$S(n)$	147	154	161	168	175	182	189	196	203	210	217	224	231	238	245	**252**
$O(n)$	172	180	188	196	204	212	220	228	236	244	**252**	260				
$N(n)$	198	207	216	225	234	243	**252**	261								

Læg mærke til, at kun begyndelsesværdierne 28, 36 og 45 skal regnes ud ved addition af konsekutive tal; derefter stiger værdierne for $S(n)$ med 7, værdierne for $O(n)$ med 8 og værdierne for $N(n)$ med 9 for hver gang n stiger med 1.

Altså er 252 det søgte mindste tal, der er sum både af 7 konsekutive tal, af 8 konsekutive tal og af 9 konsekutive tal. Vi ser af tabellen, at

$$S(33) = O(28) = N(24) ,$$

eller at

$$33 + 34 + 35 + 36 + 37 + 38 + 39 = 252$$
$$28 + 29 + 30 + 31 + 32 + 33 + 34 + 35 = 252$$
$$24 + 25 + 26 + 27 + 28 + 29 + 30 + 31 + 32 = 252 .$$

2. metode

Vi kan udregne udtryk for $S(n)$, $O(n)$ og $N(n)$.
Vi har nemlig:

$$S(a) = a + (a + 1) + (a + 2) + (a + 3) + (a + 4) + (a + 5) + (a + 6) = 7a + 21 = 7(a + 3)$$

$$O(b) = b + (b + 1) + (b + 2) + \cdots + (b + 5) + (b + 6) + (b + 7) = 8b + 28 = 4(2b + 7)$$

$$N(c) = c + (c + 1) + (c + 2) + \cdots + (c + 6) + (c + 7) + (c + 8) = 9c + 36 = 9(c + 4) .$$

Hvis et tal x kan skrives som sum af 7 konsekutive tal, må det altså være deleligt med 7, fordi $x = 7(a + 3)$. Desuden må x være deleligt med 4, da $x = 4(2b + 7)$. Endelig er x deleligt med 9, fordi $x = 9(c + 4)$. Derfor er x deleligt med $7 \cdot 4 \cdot 9 = 252$.

Det mindste tal, der kan komme i betragtning, er altså 252 - men vi véd endnu ikke, om dette tal faktisk duer. Nu er

$$252 = 7 \cdot 36 = 33 + 34 + 35 + 36 + 37 + 38 + 39$$
$$252 = 8 \cdot 31\tfrac{1}{2} = 28 + 29 + 30 + 31 + 32 + 33 + 34 + 35$$
$$252 = 9 \cdot 28 = 24 + 25 + 26 + 27 + 28 + 29 + 30 + 31 + 32 .$$

Altså er 252 faktisk et tal, der opfylder kravene om at kunne skrives som sum af 7, 8 og 9 konsekutive tal.