

# Svar på opgave 2014-149

## November 2014

### Opgaven:

Find to hele, positive tal  $x$  og  $y$ , så

$$\sqrt{69 + 20\sqrt{11}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} .$$

### Løsning:

Vi skal løse ligningen

$$\sqrt{69 + 20\sqrt{11}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} ,$$

hvor  $x$  og  $y$  er hele, positive tal. Vi kvadrerer på begge sider:

$$69 + 20\sqrt{11} = x + y + 2\sqrt{xy} .$$

Vi ser, at ligningen er opfyldt, hvis

$$x + y = 69 \quad \text{og} \quad 20\sqrt{11} = 2\sqrt{xy} .$$

Den sidste ligning kan vi kvadrere på begge sider:

$$400 \cdot 11 = 4xy \quad \Leftrightarrow \quad xy = 1100 .$$

Vi får, at  $y = 69 - x$  og dette indsættes:

$$x \cdot (69 - x) = 1100 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 69x + 1100 = 0 .$$

Dette er en almindelig andengradsligning, og vi får

$$x = \frac{69 \pm \sqrt{69^2 - 4 \cdot 1100}}{2} = \frac{69 \pm \sqrt{361}}{2} = \frac{69 \pm 19}{2} = \begin{cases} 44 \\ 25 \end{cases} .$$

Dermed er

$$y = 69 - x = \begin{cases} 25 \\ 44 \end{cases} .$$

Altså har vi at  $x = 44$  og  $y = 25$  eller  $x = 25$  og  $y = 44$ . I begge tilfælde har vi altså, at

$$\sqrt{69 + 20\sqrt{11}} = \sqrt{25} + \sqrt{44} \quad \text{eller} \quad 69 + 20\sqrt{11} = (5 + \sqrt{44})^2 .$$

*Alternativ metode.*

Vi kan gætte på, at  $\sqrt{69+20\sqrt{11}}$  kan skrives som  $a+b\sqrt{11}$ , hvor  $a$  og  $b$  er passende tal, som vi gerne vil finde. Altså er

$$69+20\sqrt{11}=(a+b\sqrt{11})^2 \Leftrightarrow 69+20\sqrt{11}=a^2+11b^2+2ab\sqrt{11}.$$

Dette er opfyldt, hvis vi kan finde  $a$  og  $b$  så

$$a^2+11b^2=69 \quad \text{og} \quad ab=10.$$

Her vil man først prøve at gætte, og det er ikke svært at se, at  $a=5$  og  $b=2$  passer. Altså er

$$\sqrt{69+20\sqrt{11}}=5+2\sqrt{11} \quad \text{eller} \quad \sqrt{69+20\sqrt{11}}=\sqrt{25}+\sqrt{44}.$$

Det er klart, at denne metode kræver et vist held, så tallene  $a$  og  $b$  'passer' og er tilstrækkelig simple til at man kan gætte dem.