

Svar på opgave 2015-153

Marts 2015

Opgaven:

Det oplyses om tallet x , at

$$x + \frac{1}{x} = 3 .$$

Find værdien af

$$x^4 + \frac{1}{x^4} .$$

Husk, at samtlige mellemregninger skal anføres.

Løsning:

1. metode:

Vi får oplyst, at

$$x + \frac{1}{x} = 3 .$$

Ved kvadrering på begge sider fås

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} = 9 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 7 .$$

Ved at kvadrere dette på begge sider fås

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = 49 \Leftrightarrow x^4 + \frac{1}{x^4} + 2 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{x^2} = 49 \Leftrightarrow x^4 + \frac{1}{x^4} = 47 .$$

2. metode:

Vi kan gange med x på begge sider, så vi får:

$$x^2 + 1 = 3x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} .$$

Vi ser på $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ og får ved kvadrering, at

$$x^2 = \frac{9+5+6\sqrt{5}}{4} = \frac{7+3\sqrt{5}}{2},$$

og ved at kvadrere endnu en gang:

$$x^4 = \frac{49+45+42\sqrt{5}}{4} = \frac{47+21\sqrt{5}}{2}.$$

Dernæst er

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^4} &= \frac{2}{47+21\sqrt{5}} = \frac{2(47-21\sqrt{5})}{(47+21\sqrt{5})(47-21\sqrt{5})} \\ &= \frac{2(47-21\sqrt{5})}{47^2-5\cdot 21^2} = \frac{2(47-21\sqrt{5})}{4} = \frac{47-21\sqrt{5}}{2}.\end{aligned}$$

Altså er

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = \frac{47+21\sqrt{5}}{2} + \frac{47-21\sqrt{5}}{2} = \frac{94}{2} = 47.$$

Hvis vi foretager de samme regninger med $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, når vi samme resultat.