Svar på opgave 2015-155 Maj 2015

Opgaven:

Løs med hensyn til x ligningen

$$\frac{a+b-x}{c}+\frac{a+c-x}{b}+\frac{b+c-x}{a}=1-\frac{4x}{a+b+c} ,$$

dvs. x skal udtrykkes ved a, b og c.

Det forudsættes, at hverken a, b eller c er 0, og at $a + b + c$ ikke er 0.

Løsning:

1. metode

Vi lægger 3 til på begge sider af lighedstegnet

$$\frac{a+b-x}{c}+1+\frac{a+c-x}{b}+1+\frac{b+c-x}{a}+1=4-\frac{4x}{a+b+c} .$$

På venstre side sættes på fælles brøkstreger:

$$\frac{a+b-x+c}{c}+\frac{a+c-x+b}{b}+\frac{b+c-x+a}{a}=4-\frac{4x}{a+b+c} .$$

Leddene $a + b + c$ udkapsles, dvs. hver brøk deles i to brøker:

$$\frac{a+b+c}{c}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{a}-\frac{x}{c}-\frac{x}{b}-\frac{x}{a}=4-\frac{4x}{a+b+c} .$$

I de tre første led på venstre side sættes $a + b + c$ uden for parentes, i de tre sidste sættes x uden for parentes. På højre side sættes på fælles brøkstreg:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)-x\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{4(a+b+c)-4x}{a+b+c} .$$

På venstre side sættes faktoren $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ uden for parentes og højre side flyttes over:

$$\left(a+b+c-x\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-4\cdot\frac{a+b+c-x}{a+b+c}=0\ .$$

Nu er $a + b + c - x$ fælles faktor for de to led på venstre side. Denne faktor sættes uden for parentes:

$$\left(a+b+c-x\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{4}{a+b+c}\right)=0\ .$$

Efter nulreglen er en af faktorerne 0, og da det ikke er den sidste, må der gælde, at

$$a + b + c - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = a + b + c\ .$$

Den sidste faktor kan blive 0 for visse værdier af a, b og c, og vi forudsætter altså, at

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\neq\frac{4}{a+b+c}\ .$$

2. metode

Vi indfører en ny variabel y ved

$$y = a + b + c - x\ .$$

Så er

$$x = a + b + c - y\ ,\quad a + b - x = y - c\ ,\quad a + c - x = y - b\ ,\quad b + c - x = y - a\ ,$$

så ligningen får udseendet

$$\frac{y-c}{c}+\frac{y-b}{b}+\frac{y-a}{a}=1-\frac{4(a+b+c-y)}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{y}{c}-1+\frac{y}{b}-1+\frac{y}{a}-1=1-\frac{4(a+b+c)-4y}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow\quad y\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=4-\frac{4(a+b+c)}{a+b+c}+\frac{4y}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow\quad y\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{4y}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow\quad y\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{4}{a+b+c}\right)=0\ .$$

Da parentesen ikke er 0, må $y = 0$, dvs.

$$y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a + b + c - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = a + b + c.$$

I virkeligheden er denne metode en lidt ændret udgave af den første metode, hvor jo størrelsen $a + b + c - x$ optræder undervejs i omskrivningerne.

3. metode

Ligningen er en førstegradsligning og den har derfor højst en løsning. Den første brøk

$$\frac{a+b-x}{c}$$

får os til at gætte på løsningen $x = a + b + c$. Indsættes denne værdi i ligningen, får vi på venstre side

$$\frac{a+b-a-b-c}{c}+\frac{a+c-a-b-c}{b}+\frac{b+c-a-b-c}{a}=\frac{-c}{c}+\frac{-b}{b}+\frac{-a}{a}=-3\ ,$$

og højre side bliver

$$1-\frac{4(a+b+c)}{a+b+c}=1-4=-3\ .$$

Altså er $x = a + b + c$ løsning.