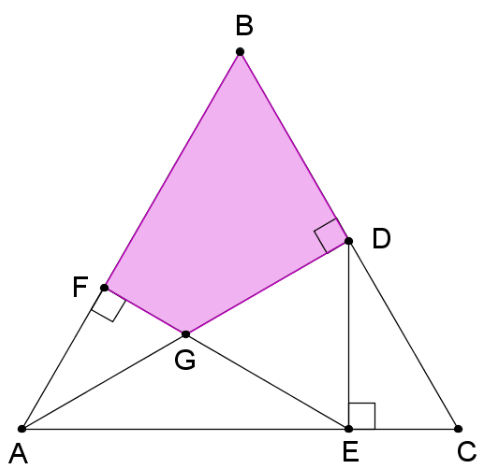
Svar på opgave 2015-156
Juni 2015

Opgaven:

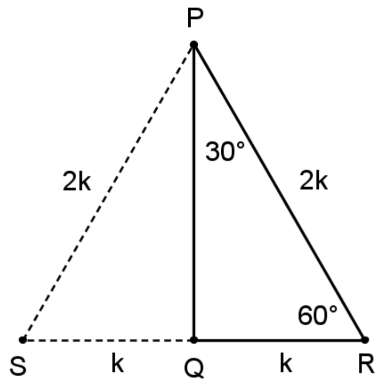
ΔABC er ligesidet med en sidelængde på 24.
Projektionen af A på BC er D, projektionen af D på AC er E og projektionen af E på AB er F. Linjerne AD og EF skærer hinanden i G.
Beregn arealet af □$BFGD$.



Husk, at samtlige mellemregninger skal anføres.

Løsning:

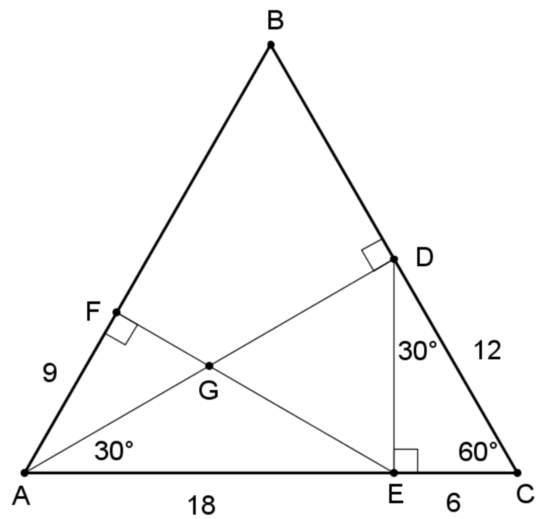
Vi begynder med at bemærke, at der i en trekant PQR med vinkler på 30°, 60° og 90° gælder, at den korte katete (over for vinklen på 30°) er halvt så lang som hypotenusen. Dette skyldes, at ΔPQR kan opfattes som halvdelen af en ligesidet trekant PRS, hvor højden PQ halverer siden RS.



Nu er ΔDEC en 30°-60°-90°-trekant, så DC = 12 og EC = 6 og dermed AE = 18.
Pythagoras i ΔDEC giver

$$DE^2 = DC^2 - EC^2 = 12^2 - 6^2 = 108 \quad \Leftrightarrow \quad DE = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}\ .$$

ΔADE er også en 30°-60°-90°-trekant, og da DE er den korte katete, er $DA = 12\sqrt{3}$.



I ΔAFE er A = 60° og F = 90°, så $\angle AEF = 30°$. Så er ΔAFE en 30°-60°-90°-trekant, så $AF = \frac{1}{2} AE = \frac{1}{2} \cdot 18 = 9$.

Da ΔAGF og ΔDCE er ensvinklede, er

$$\frac{FA}{ED} = \frac{FG}{EC} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{9}{6\sqrt{3}} = \frac{FG}{6} \quad \Leftrightarrow \quad FG = \frac{9 \cdot 6}{6\sqrt{3}} = \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}\ .$$

Nu kan vi finde arealet af ΔABD:

$$[ABD] = \tfrac{1}{2} \cdot BD \cdot AD = \tfrac{1}{2} \cdot 12 \cdot 12\sqrt{3} = 72\sqrt{3}\ .$$

Arealet af ΔAGF er

$$[AGF] = \tfrac{1}{2} \cdot FA \cdot FG = \tfrac{1}{2} \cdot 9 \cdot 3\sqrt{3} = \tfrac{27}{2}\sqrt{3}\ .$$

Altså er det søgte areal af firkanten:

$$[BFGD] = [ABD] - [AGF] = 72\sqrt{3} - \tfrac{27}{2}\sqrt{3} = \tfrac{117}{2}\sqrt{3}\ .$$